І.О. Мороз, В.С. Іваній
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

Р.І. Холодов
ІПФ НАН України

4-вимірні вектори в СТВ

Вивчення явищ, які протікають з великими швидкостями, вимагає врахування скінченності швидкості передачі взаємодії. Це, спільно з вимогою інваріантності законів всіх явищ по відношенню до зміни системи відліку, приводить до необхідності нерозривного розгляду простору і часу та введення єдиного об’єкту, у якому протікають всі процеси в природі - чотиривимірного простору-часу. Із цього приводу Мінковський писав: "Простір сам по собі і час сам по собі зануряться в річку забуття, а жити залишиться лише своєрідний їх союз". Розглянемо методи введення 4-вимірних векторів.

Старий (первинний) спосіб введення 4-векторів

4-вектори будуються аналогічно звичайним векторам у тривимірному просторі, але у чотиривимірному просторі точка задається трьома просторовими координатами x_1, x_2, x_3 а четверта координата – це уявний час: $x_4 = ict$.

Всю релятивістську механіку можна записати в 4-х вимірній тензорній формі, у якій перетвореннями систем координат є "повороти". Якщо поворот здійснено в площині з просторовими вісями (наприклад, x_1, x_2), то це є звичайним поворот в площині x, y. Якщо "поворот" здійснено в площині з просторовою (нехай x_1) і часовою (x_4) вісями, то це є перехід до іншої інерціальної системи відліку, яка рухається уздовж вісі x, зі швидкістю, що задається кутом повороту за формулою $tg\varphi = -\frac{x}{\tau} = i\frac{Vt}{c}$.

Підкреслимо, що даний 4-вимірний простір є *евклідовим простором*, оскільки в ньому скалярний добуток двох векторів, A і B визначається як сума добутків їх відповідних компонент:

$$\left(A,B\right) = A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + A_4 B_4, \qquad i = 1,2,3,4.$$

Одним з недоліків такого підходу є введення комплексних чисел. Це привело до того, що 4-вимірним записом з уявною одиницею користуються останнім часом все рідше і рідше. Найбільшого поширення у більшості сучасної навчальної та наукової літератури набуло інше (абсолютно еквівалентне) тензорне формулювання законів фізики, так звана *коваріантна форма*, до розгляду якої далі ми надалі й перейдемо. Головною перевагою коваріантної форми законів фізики, у порівнянні із старим формулюванням, є можливість природного узагальнення на загальну теорію відносності.

Новий (сучасний) спосіб введення 4-векторів

Замість координати $x_4 = ict$ вводиться координата $x_0 = ct$. Тоді точка в 4-вимірному просторі-часі характеризується такими чотирма координатами:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \quad \text{або } x^i, \quad i = 0,1,2,3. \qquad (1)$$

Слід звернути увагу на розташування індексу (i) – тут використано верхній індекс. Це є суттєвим, оскільки будуть використовуватись і величини з нижніми індексами.

Якщо від початку відліку чотиривимірного простору провести вектор у деяку точку, то координати цієї точки (вона зображає подію) x^1, x^2, x^3, x^4 будуть компонентами чотиривимірного радіус-вектора **r**. Отже: *4-радіус-вектор* – це чотири числа x^1, x^2, x^3, x^4, які однозначно задають положення точки у даному 4-вимірному просторі. Прийнято писати роздільно нульову (часову) і решту компонентів:

$$\mathbf{r} = (ct, \vec{r}) = (x^0, x^1, x^2, x^3), \qquad (2)$$

де $\vec{r} = (x, y, z)$ - радіус-вектор у звичайному 3-вимірному просторі.

Із означення слідує, що компоненти 4-радіус-вектора перетворюються за формулами Лоренца, які у нових позначеннях (1) мають вигляд:

$$\begin{cases} x^0 = \gamma(x^{0\,\prime} + \dfrac{V}{c} x^{1\,\prime}), & x^2 = x^{2\,\prime} \\ x^1 = \gamma(x^{1\,\prime} + \dfrac{V}{c} x^{0\,\prime}), & x^3 = x^{3\,\prime} \end{cases}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}. \qquad (3)$$

Підкреслимо, що в нових позначеннях перетворення Лоренца для x^0, x^1 мають абсолютно симетричний вигляд.

Дві нескінченно близькі події визначають диференціал 4-вимірного радіус-вектора. При переході в іншу систему координат диференціал перетвориться за стандартними правилами математичного аналізу:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{0\,\prime}} dx^{0\,\prime} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{1\,\prime}} dx^{1\,\prime} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{2\,\prime}} dx^{2\,\prime} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{3\,\prime}} dx^{3\,\prime}, \quad i = 0,1,2,3. \qquad (4)$$

Якщо перетворення координат лінійні, то аналогічна формула справедлива не тільки для диференціалів, але і для самих x^i координат:

$$x^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{0\,\prime}} x^{0\,\prime} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{1\,\prime}} x^{1\,\prime} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{2\,\prime}} x^{2\,\prime} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{3\,\prime}} x^{3\,\prime}, \quad i = 0,1,2,3, \qquad (5)$$

де $\dfrac{\partial x^i}{\partial x^k}$ - є постійними величинами.

Лінійні перетворення координат (5) включають звичайні тривимірні повороти і перетворення Лоренца:

Тривимірні повороти. При цьому нульова компонента 4-радіус-вектора не змінюється, а інші перетворюються як звичайний радіус-вектор $\vec{r} = (x^1, x^2, x^3)$.

Перетворення Лоренца. У цьому випадку постійні коефіцієнти можна отримати, порівнюючи (5) і (3). Ці коефіцієнти утворюють матрицю, яка називається *матриця перетворень Лоренца* ||П||.

Для визначення компонент матриці перетворень Лоренца перепишемо перетворення (3) у вигляді:

$$x^0 = \gamma \cdot x^0{}' + (V/c)\gamma \cdot x^1{}' + 0 \cdot x^2{}' + 0 \cdot x^3,$$
$$x^1 = (V/c)\gamma \cdot x^0{}' + \gamma \cdot x^1{}' + 0 \cdot x^2{}' + 0 \cdot x^3,$$
$$x^2 = 0 \cdot x^0{}' + 0 \cdot x^1{}' + 1 \cdot x^2{}' + 0 \cdot x^3,$$
$$x^2 = 0 \cdot x^0{}' + 0 \cdot x^1{}' + 0 \cdot x^2{}' + 1 \cdot x^3.$$

Тепер запишемо ці співвідношення в матричній формі

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & (V/c)\gamma & 0 & 0 \\ (V/c)\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^0{}' \\ x^1{}' \\ x^2{}' \\ x^3{}' \end{pmatrix}, \tag{6}$$

де

$$\| \Pi \| = \begin{pmatrix} \gamma & (V/c)\gamma & 0 & 0 \\ (V/c)\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

і є матриця перетворень Лоренца. Це перетворення 4-радіус-вектора зазвичай записують компактно у вигляді

$$\mathbf{r} = \| \Pi \| \cdot \mathbf{r}', \tag{8}$$

або по компонентно

$$x^i = \sum_{k=0}^{3} \Pi^i{}_k \cdot x^k{}' = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial x^k{}'} \cdot x^k{}'. \tag{9}$$

У цьому виразі індекс k у матриці написаний внизу, щоб підкреслити, що він має відношення до знаменника дробу $\partial x^i / \partial x^k{}'$.

За *угодою Ейнштейна*, якщо індекс у тензорному записі в окремому доданку зустрічається двічі, то по ньому проводиться додавання, а знак суми для простоти запису не пишеться, тобто

$$x^i = \Pi^i{}_k \cdot x^k{}' = \frac{\partial x^i}{\partial x^k{}'} \cdot x^k{}'. \tag{10}$$

Будь-який вектор в 4-вимірному просторі можна перенести в початок координат, тоді його кінець попаде в деяку точку - подію, і координати цієї точки будуть компонентами цього вектора. Тому формули перетворень Лоренца є законом перетворення 4-вимірних векторів. У коваріантній формі запису існує два типи векторів – контраваріантні і коваріантні вектори.

Контраваріантний 4-вектор A^i (індекс пишеться зверху) – сукупність 4-х величин A^0, A^1, A^2, A^3 які при переході в іншу систему координат перетворяться як компоненти 4-радіус-вектора за правилом (10):

$$A^i = \Pi^i{}_k A^{k\,\prime} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k\,\prime}} A^{k\,\prime}. \tag{11}$$

Зокрема, при перетворенні Лоренца 4-вектор A^i перетвориться аналогічно перетворенню координат (3):

$$\begin{cases} A^0 = \gamma(A^{0\,\prime} + \dfrac{V}{c} A^{1\,\prime}), \quad A^2 = A^{2\,\prime} \\ A^1 = \gamma(A^{1\,\prime} + \dfrac{V}{c} A^{0\,\prime}), \quad A^3 = A^{3\,\prime} \end{cases}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}. \tag{12}$$

Нульова компонента 4-вектора A^i має назву *часова компонента*. Останні три називаються *просторовими компонентами*, вони утворюють звичайний 3-вимірний вектор $\vec{A}$. Як і 4-радіус-вектор (2), довільний контраваріантний 4-вектор A^i зазвичай записують у вигляді

$$A^i = (A^0, \vec{A}) = (A^0, A^1, A^2, A^3). \tag{13}$$

Штриховані компоненти вектора $A^{i\,\prime}$ виражаються через не штриховані за допомогою оберненої матриці до матриці $||\Pi||$:

$$A^{k\,\prime} = (\Pi^{-1})^k{}_i A^i = \frac{\partial x^{k\,\prime}}{\partial x^i} A^i. \tag{14}$$

Для перетворень Лоренца обернена матриця відрізняється від прямої тільки знаком швидкості V.

Скаляр φ - величина, яка не змінюється при перетвореннях координат у заданому 4-вимірному просторі. Насправді у фізиці під скаляром розуміється скалярне поле. Це означає, що дана величина є функція від координат і часу. Тоді величина φ- скаляр, якщо

$$\varphi(x^0, x^1, x^2, x^3) = \varphi'(x^{0\,\prime}, x^{1\,\prime}, x^{2\,\prime}, x^{3\,\prime}), \tag{0.1}$$

де координати x^0, x^1, x^2, x^3 виражаються через координати $x^{0\prime}$, $x^{1\prime}$, $x^{2\,\prime}$, $x^{3\prime}$ згідно з перетворенням (10).

Візьмемо похідну від рівності (15) по i-ій компоненті координати x^i, використовуючи стандартні правила математичного аналізу для заміни змінних:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial x^{0\,\prime}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \varphi'}{\partial x^{0\,\prime}} + \frac{\partial x^{1\,\prime}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \varphi'}{\partial x^{1\,\prime}} + \frac{\partial x^{2\,\prime}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \varphi'}{\partial x^{2\,\prime}} + \frac{\partial x^{3\,\prime}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \varphi'}{\partial x^{3\,\prime}} = \frac{\partial x^{k\,\prime}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \varphi'}{\partial x^{k\,\prime}}. \tag{16}$$

Слід звернути увагу на те, що коефіцієнти $\partial x^{k}{}' / \partial x^{i}$ в (16) – це компоненти оберненої матриці перетворень координат (див. вираз (14)), тобто

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^{i}} = (\Pi^{-1})^{k}{}_{i} \cdot \frac{\partial \varphi'}{\partial x^{k}{}'} = \frac{\partial x^{k}{}'}{\partial x^{i}} \cdot \frac{\partial \varphi'}{\partial x^{k}{}'}. \qquad (17)$$

Коваріантний 4-вектор A_i (індекс пишеться внизу) – це сукупність 4-х величин A_0, A_1, A_2, A_3, які при переході до іншої системи координат перетворюються як компоненти похідної скаляра за правилом (17):

$$A_i = (\Pi^{-1})^{k}{}_{i} \cdot A_k{}' = \frac{\partial x^{k}{}'}{\partial x^{i}} \cdot A_k{}' \qquad (18)$$

Підкреслимо ще раз, в коваріантній формі запису виразів існують два принципово різних типи векторів. Контраваріантні вектори задаються за допомогою матриці прямих перетворень координат, а коваріантні за допомогою оберненої матриці. Можна побудувати й більш складні тензорні конструкції.

Контраваріантний тензор II-го рангу – це сукупність шістнадцяти величин, які при заміні системи координат перетворюються як прямий добуток контраваріантних векторів:

$$T^{ik} = \Pi^{i}{}_{m} \cdot \Pi^{k}{}_{n} \cdot T^{mn}{}' = \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{m}{}'} \cdot \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{n}{}'} \cdot T^{mn}{}'. \qquad (19)$$

Коваріантний тензор II-го рангу – це сукупність шістнадцяти величин, які перетворюються як прямий добуток коваріантних векторів:

$$T_{ik} = (\Pi^{-1})^{m}{}_{i} \cdot (\Pi^{-1})^{n}{}_{k} \cdot T_{mn}{}' = \frac{\partial x^{m}{}'}{\partial x^{i}} \cdot \frac{\partial x^{n}{}'}{\partial x^{k}} \cdot T_{mn}{}'. \qquad (20)$$

Змішаний тензор II-го рангу – сукупність шістнадцяти величин, які перетворюються як прямий добуток контраваріантного вектора на коваріантний (або навпаки):

$$T^{i}{}_{k} = \Pi^{i}{}_{m} \cdot (\Pi^{-1})^{n}{}_{k} \cdot T^{m}{}_{n}{}' = \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{m}{}'} \cdot \frac{\partial x^{n}{}'}{\partial x^{k}} \cdot T^{m}{}_{n}{}'. \qquad (21)$$

Відзначимо, що в загальному випадку $T^{i}{}_{k} \neq T_{i}{}^{k}$.

Аналогічно тензорам другого рангу будуються тензори довільного рангу. Ранг тензора визначається кількістю індексів і дорівнює числу матриць перетворення у виразах типу (19-21). У зв'язку з цим, вектор називають тензор першого рангу, а скаляр – тензор нульового рангу. Під індексами, що двічі повторюються, мається на увазі підсумовування. Такі індекси називають *німими*, вони не враховуються у ранзі тензорів, індекси, що при цьому повторюються, мають різну варіантність (один зверху інший знизу). Так, наприклад, у виразі (21) німими є індекси m і n. В протилежність німим індексам m і n індекси i й k називаються *мовними*, в окремому доданку вони зустрічаються тільки один раз.

Запишемо квадрат інтервалу між двома нескінченно близькими подіями:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 .$$

Формально цю величину можна представити у такому вигляді

$$ds^2 = \sum_{i=0}^{3}\sum_{k=0}^{3} g_{ik} dx^i dx^k = g_{ik} dx^i dx^k , \tag{22}$$

де g_{ik} коефіцієнти визначаються з явного виду квадрата інтервалу. Їх записують у вигляді матриці

$$\| g_{ik} \| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Проаналізуємо вираз (22). З лівого боку рівності знаходиться квадрат інтервалу – це інваріантна величина, тобто за тензорним змістом – це скаляр. Справа – скалярний добуток величини g_{ik} на два контраваріантні вектори dx_i і dx_k. Тоді, за *ознакою тензорності,* компоненти g_{ik} утворюють коваріантний тензор другого рангу, який має назву *коваріантний метричний тензор*.

Відзначимо, що квадрат інваріанта у вигляді (22) можна записати у будь-якій іншій системі координат (штрихованій):

$$ds'^2 = \sum_{i=0}^{3}\sum_{k=0}^{3} g_{ik}' dx^i{}' dx^k{}' = g_{ik}' dx^i{}' dx^k{}' . \tag{24}$$

Оскільки

$$ds'^2 = (dx^0{}')^2 - (dx^1{}')^2 - (dx^2{}')^2 - (dx^3{}')^2$$

і, враховуючи інваріантність інтервалу, можна відмітити, що у штрихованій системі координат метричний тензор матиме такий самий вигляд (23), тобто

$$g_{ik} = g_{ik}' = inv . \tag{25}$$

Таким чином, метричний тензор є інваріантним по відношенню до перетворень координат (повороту і перетворенню Лоренца). Метричний тензор g_{ik} визначає метрику 4-простору-часу. 4-вимірний простір, у якому тензор g_{ik} визначається виразом (23) називається *псевдоевклідовим* або *простором Мінковського*. Для евклідового простору $g_{ik}^{евкл}$ – одинична діагональна матриця або символ Кронекера.

Операція опускання індексу

Будь-яку векторну величину можна представити як в коваріантній, так і контраваріантній формі. Зв'язок між формами здійснюється за допомогою метричного тензора. Нехай задано контраваріантний вектор **A** з компонентами $A^i = (A^0, \vec{A})$, тоді відповідний йому коваріантний вектор буде дорівнювати

$$A_i = g_{ik} A^k . \tag{26}$$

Визначимо компоненти такого вектора:

$\underline{i = 0:}$ $\quad A_0 = g_{0k}A^k = g_{00}A^0 + g_{01}A^1 + g_{02}A^2 + g_{03}A^3 = A^0,$

$\underline{i = 1:}$ $\quad A_1 = g_{1k}A^k = g_{10}A^0 + g_{11}A^1 + g_{12}A^2 + g_{13}A^3 = -A^1,$

$\underline{i = 2:}$ $\quad A_2 = g_{2k}A^k = g_{20}A^0 + g_{21}A^1 + g_{22}A^2 + g_{23}A^3 = -A^2,$

$\underline{i = 3:}$ $\quad A_3 = g_{3k}A^k = g_{30}A^0 + g_{31}A^1 + g_{32}A^2 + g_{33}A^3 = -A^3.$

Остаточно одержуємо:

$$A^i = (A^0, \vec{A}), \qquad A^i = (A^0, -\vec{A}), \tag{27}$$

тобто коваріантний вектор відрізняється від початкового контраваріантного вектора лише знаком просторових компонент.

Скалярний добуток 4-векторів

Скалярний добуток можна побудувати тільки із векторів різної варіантності (різного розташування індексів). Нехай задано контраваріантний вектор A^i і коваріантний вектор B_i. Тоді

$$A^iB_i = \sum_{i=0}^{3} A^iB_i = A^0B_0 + A^1B_1 + A^2B_2 + A^3B_3 \tag{28}$$

або з урахуванням зв'язку контраваріантних і коваріантних компонент **Ошибка! Источник ссылки не найден.**:

$$A^iB_i = A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3 = A^0B^0 - \vec{A}\vec{B}. \tag{29}$$

Тепер з'ясуємо, як поводиться скалярний добуток при перетворенні системи координат. За означенням векторів

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k}{'}} A^{k}{'}, \quad B_i = \frac{\partial x^{m}{'}}{\partial x^i} B_m{'}. \tag{30}$$

Підставимо ці вирази у скалярний добуток, при цьому враховуємо, що

$$\partial x^{m}{'} / \partial x^{n}{'} = \delta^m_n = \begin{cases} 1, \ m = n \\ 0, \ m \neq n \end{cases} - \text{символ Кронекера}. \tag{31}$$

В результаті маємо:

$$A^iB_i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k}{'}} \frac{\partial x^{m}{'}}{\partial x^i} A^{k}{'} B_m{'} = \frac{\partial x^{m}{'}}{\partial x^{k}{'}} A^{k}{'} B_m{'} = \delta^m_k A^{k}{'} B_m{'} = A^{m}{'} B_m{'}, \tag{32}$$

тобто скалярний добуток векторів не змінюється при перетвореннях системи координат

$$A^iB_i = inv. \tag{33}$$

Зокрема, якщо за вектор B_i взяти коваріантні компоненти вектора **A**, то знайдемо, що квадрат вектора – інваріантна величина:

$$\mathbf{A}^2 = A^iA_i = (A^0)^2 - (\vec{A})^2 = inv. \tag{34}$$

Проте цей результат є зрозумілим і без розрахунків, оскільки початок координат, у якому знаходиться початок 4-вимірного вектора, і деяка точка 4-вимірного простору (де знаходиться кінець вектора) розділені інтервалом (24) S_{0A}, який є інваріантним, а модуль вектора $\mathbf{A}(A^0, A^1, A^2, A^3)$ співпадає з величиною інтервалу S_{0A}.

Тензор обернений даному

Нехай задано тензор другого рангу **T** з контраваріантними компонентами T^{ik}. Коваріантний тензор $\| B_{km} \|$ називається *обернений тензору* T^{ik}, якщо

$$T^{ik} B_{km} = \delta^i_m, \qquad (34)$$

де δ^i_m – символ Кронекера.

Контраваріантний метричний тензор g^{ik} визначимо як обернений до коваріантного (23):

$$g^{ik} g_{km} = \delta^i_m. \qquad (35)$$

З урахуванням того, що

$$\| g_{km} \| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \| \delta^i_m \| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

можна одержати явний вигляд $\| g^{ik} \|$:

$$\| g^{ik} \| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (36)$$

який збігається з коваріантним метричним тензором. Якщо помножити цей тензор на коваріантний ()23, то одержимо одиничну матрицю.

За допомогою $\| g^{ik} \|$ задається *операція підняття індексу*:

$$A^i = g^{ik} A_k. \qquad (37)$$

Нескладно переконатися, що вектори (27) дійсно задовольняють даному співвідношенню.

Розглянемо властивості симетрії тензора другого рангу.

Будь-який тензор II-го рангу можна представити у вигляді суми симетричного і антисиметричного тензорів. Нехай T^{ik} – контраваріантні компоненти заданого тензора. Тоді їх можна записати у вигляді

$$T^{ik} = \frac{T^{ik} + T^{ki}}{2} + \frac{T^{ik} - T^{ki}}{2} = S^{ik} + A^{ik},$$

де

$$S^{ik}=\frac{T^{ik}+T^{ki}}{2},\quad A^{ik}=\frac{T^{ik}-T^{ki}}{2},$$

при цьому очевидно $\|S^{ik}\|$ – симетричний, а $\|A^{ik}\|$ – антисиметричний тензори:

$$S^{ik}=S^{ki},\quad A^{ik}=-A^{ik}.$$

У загальному випадку (для 4-вимірного простору) симетричний тензор має 10 незалежних компонент, а антисиметричний тензор – 6.

Розглянемо контраваріантний антисиметричний тензор $\|A^{ik}\|$. Запишемо явний вигляд такого тензора:

$$\|A^{ik}\|=\begin{pmatrix} 0 & A^{01} & A^{02} & A^{03} \\ -A^{01} & 0 & A^{12} & A^{13} \\ -A^{02} & -A^{12} & 0 & A^{23} \\ -A^{03} & -A^{13} & -A^{23} & 0 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

При тривимірних поворотах (поворот у звичайному просторі) просторові компоненти (i=1,2,3) складають звичайний тривимірний антисиметричний тензор. Такому тензору $\|A^{ik}\|$ можна поставити у відповідність тривимірний аксіальний вектор $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ за наступним правилом

$$a_x=-A^{23},\quad a_y=-A^{31},\quad a_z=-A^{12}. \tag{39}$$

Відзначимо, що мінус в цих виразах пов'язаний із псевдо евклідовістю простору Мінковського.

При цих же поворотах компоненти A^{01},A^{02},A^{03} складають полярний вектор $\vec{p}=(p_x,p_y,p_z)$:

$$p_x=A^{01},\quad p_y=A^{02},\quad p_z=A^{03}. \tag{40}$$

Враховуючи (39) і (40), можна записати

$$A^{ik}=\begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Коваріантні компоненти цього тензора можна одержати, якщо до виразу (40) двічі застосувати операцію опускання індексу:

$$A_{ik}=g_{im}g_{kn}A^{mn}. \tag{42}$$

Прості розрахунки дають явний вигляд компонент цього тензора:

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -p_x & -p_y & -p_z \\ p_x & 0 & -a_z & a_y \\ p_y & a_z & 0 & -a_x \\ p_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}. \qquad (43)$$

Компактно контраваріантний і коваріантний антисиметричні тензори записуються у вигляді:

$$A^{ik} = (\vec{p}, \vec{a}), \quad A_{ik} = (-\vec{p}, \vec{a}). \qquad (44)$$

Антисиметричний 4-тензор другого рангу має важливе значення, зокрема, в класичній електродинаміці, записаній в коваріантній формі, тому що електромагнітне поле задається в 4-вимірному просторі Мінковського саме таким тензором. У цьому випадку роль полярного вектора відіграє вектор напруженості електричного поля, а аксіального – вектор індукції магнітного поля.

Символ ε ^{iklm}

Крім метричного тензора і, звичайно, одиничного властивістю інваріантності у загальному випадку володіє ще один тензор: абсолютно антисиметричний одиничний псевдотензор 4-го рангу $\boldsymbol{\varepsilon}^{iklm}$. Компоненти цього тензора дорівнюють або 0, або ±1. За означенням

$$\varepsilon^{0123} = 1. \qquad (45)$$

Решта компонентів можуть бути визначені через ε^{0123}, використовуючи властивість антисиметрії тензора. Так, якщо два індекси однакові, то компонента тензора дорівнює нулю. Відмінними від нуля можуть бути лише компоненти, у яких всі 4 індекси різні. Ці компоненти дорівнюють +1 або -1, залежно від того парним чи непарним числом перестановок вони можуть бути приведені до послідовності 0, 1, 2, 3, оскільки при перестановці пари індексів місцями компонента антисиметричного тензора змінює знак.

Даний символ $\boldsymbol{\varepsilon}^{iklm}$ є аналогом введеного в звичайному 3-вимірному просторі *символу Леві-Чивіта* $\boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma}$ – одиничного абсолютно антисиметричного псевдотензора 3-го рангу і пов'язаний з ним наступним співвідношенням

$$\varepsilon^{0\alpha\beta\gamma} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3. \qquad (46)$$

Для знаходження значення конкретної компоненти символу Леві-Чивіта використовується правило, яке описане вище для ε^{iklm}.

Для символу Леві-Чивіта можна записати корисне співвідношення

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon^{\mu\nu\gamma} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} \qquad (47)$$

Умовимося надалі латинськими літерами позначати індекси 4-вимірного простору Мінковського, а грецькими – індекси звичайного простору:

$$i, k, l, ... = 0, 1, 2, 3, \qquad \alpha, \beta, \gamma, ... = 1, 2, 3. \qquad (48)$$

У звичайному 3-вимірному просторі три похідні по координатах об'єднані одним поняттям – *оператором набла* ∇ :

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{r}} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) = (\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}), \qquad (49)$$

при цьому $\nabla_x = \partial / \partial x$ і так далі.

Аналогічні диференціальні та інтегральні операції вводяться і в просторі Мінковського. Аналогом оператора набла є 4-похідна, яка буває двох типів – коваріантна і контраваріантна залежно від розташування індексу.

Коваріантна 4-похідна:

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} = (\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}) = (\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla). \qquad (50)$$

Контраваріантна 4-похідна

Цю похідну одержимо із попередньої (50) за допомогою операції підняття індексу (37):

$$\partial^i = g^{ik}\partial_k = (\frac{\partial}{\partial x^0}, -\frac{\partial}{\partial x^1}, -\frac{\partial}{\partial x^2}, -\frac{\partial}{\partial x^3}) = (\frac{\partial}{c\partial t}, -\nabla). \qquad (51)$$

4-градієнт:

$$A_i = \partial_i \varphi = (\frac{\partial \varphi}{\partial x^0}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^3}) = (\frac{\partial \varphi}{c\partial t}, \nabla \varphi), \qquad (52)$$

$$A^i = \partial^i \varphi = (\frac{\partial \varphi}{c\partial t}, -\nabla \varphi).$$

4-дивергенція:

$$\partial_i A^i = \partial^i A_i = \partial_0 A^0 - \nabla \vec{A} = \frac{\partial A^0}{c\partial t} - div(\vec{A}). \qquad (53)$$

4-ротор - це антисиметричний тензор 2-го рангу, побудований з компонент вектора:

$$F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i. \qquad (54)$$

Даламбертіан (оператор Даламбера):

$$\Box \equiv -\partial_i \partial^i = -\partial_0 \partial^0 + (\nabla \cdot \nabla) = \Delta - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2}. \qquad (55)$$

Елемент об'єму простору Мінковського $d\Omega$:

$$d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = cdt \cdot dV = inv. \qquad (56)$$

За змістом ця величина (елементарний об'єм) є скаляр, тобто ця величина інваріантна при перетвореннях координат. Пов'язано це з тим, що перетворення, які розглядаються, математично виглядають як повороти в просторі, а вони не змінюють величини об'єму.

Узагальнена теорема Остроградського-Гаусса:

$$\iiiint_{\Omega} d\Omega \, \partial_i A^i = \oiiint_{S} dF_i A^i \,, \qquad (57)$$

де dF_i – компонента i коваріантного вектора елемента гіперповерхні (3-вимірного об'єму), напрямленого перпендикулярно цій гіперповерхні.

Узагальнена теорема Стокса:

$$\frac{1}{2}\iint_{S} dS_{ik}(\partial^i A^k - \partial^k A^i) = \oint_{l} dx_i A^i \,. \qquad (58)$$

Легко відмітити, що 4-вимірні співвідношення (50-58) є природним узагальненням звичайних 3-вимірних виразів.

На закінчення знайдемо правила перетворення похідних за координатами й часом при переході до іншої інерціальної системи відліку. Оскільки контраваріантна 4-похідна $\partial^i = (\partial / c\partial t, -\nabla)$ визначена як контраваріантний 4-вектор, то її компоненти перетворяться як координати і час при прямих перетвореннях Лоренца (3), а саме:

$$x^0 = \gamma(x^{0\prime} + \frac{V}{c} x^{1\prime}), \; x^1 = \gamma(x^{1\prime} + \frac{V}{c} x^{0\prime}), \; x^2 = x^{2\prime}, \;\; x^3 = x^{3\prime}.$$

Для величин ∂^i аналогічні вирази мають вигляд:

$$\partial^0 = \gamma(\partial^{0\prime} + \frac{V}{c} \partial^{1\prime}), \; \partial^1 = \gamma(\partial^{1\prime} + \frac{V}{c} \partial^{0\prime}), \; \partial^2 = \partial^{2\prime}, \;\; \partial^3 = \partial^{3\prime}.$$

Підставляючи сюди явний вигляд компонент 4-похідної, одержимо шукані співвідношення:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} = \gamma(\dfrac{\partial}{\partial t'} - V\dfrac{\partial}{\partial x'}), \\ \dfrac{\partial}{\partial x} = \gamma(\dfrac{\partial}{\partial x'} - \dfrac{V}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t'}), \qquad \dfrac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y'}, \quad \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z'}, \end{cases} \qquad (59)\ (0.2)$$

Відзначимо одну цікаву особливість цих перетворень. Для цього запишемо їх на нерелятивістській границі, якщо $V / c \to 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t'} - V\dfrac{\partial}{\partial x'}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x'}, \quad \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y'}, \quad \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z'}. \end{cases} \qquad (60)\ \ (0.3)$$

Знайдені співвідношення показують, що похідна за часом містить додатковий доданок – похідну за координатою. При перетвореннях Галілея такий доданок, звичайно ж, відсутній, оскільки у рамках нерелятивістської класичної механіки час є абсолютною величиною, тобто $t = t'$.

Використання чотиривимірного простору, векторних та тензорних величин і диференціальних операторів являється інструментом, який найбільш адекватно описує всі явища СТВ та релятивістської електродинаміки.