УДК 538.3+372.853

Величко Степан Петрович

Мороз Іван Олексійович

Песоцька Інеса Олександрівна

МЕТОДИКА ОБГРУНТУВАННЯ ПОНЯТТЯ «ВЕКТОРНИЙ ПОТЕНЦІАЛ» МАГНІТНОГО ПОЛЯ В КУРСІ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

Розглядається методика введення та розрахунку векторного потенціалу в курсі « Класична електродинаміка» педагогічних університетів.

Ключові слова: рівняння Максвелла, векторний потенціал, рівняння Пуассона і Лапласа.

Постановка проблеми. Вивчення електричного поля стаціонарних зарядів показує, що воно є потенціальним, тобто робота по переміщенню заряду в ньому не залежить від форми шляху. Тому будь-якій точці поля можна поставити у відповідність енергетичну характеристику поля – потенціал:

$$\varphi_a = \int_a^\infty \vec{E} d\vec{l} \ ,$$

який визначається через роботу по переміщенню одиничного заряду із даної точки поля в нескінченно віддалену точку. Потенціал системи зарядів можна визначити за принципом суперпозиції:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r}$$

або шляхом розв'язання рівняння Пуассона і Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Силова характеристика електричного поля – напруженість пов'язана з потенціалом формулою: $\vec{E} = -grad\varphi$. Такий (енергетичний) підхід застосовується і в механіці при вивченні гравітаційних полів та полів пружних сил. Енергетичне описання силових полів є надзвичайно плідним, оскільки воно, по-перше, приводить до формулювання законів збереження і виявляє їх зв'язок з властивостями простору та часу, і, по-друге, у багатьох випадках при вивченні руху тіл в потенціальних полях вдається з'ясувати основні риси руху без розв'язання складної математичної задачі, пов'язаної з інтегруванням рівняння руху.

Магнітне поле не є потенціальним і в загальному випадку ввести скалярний потенціал, як енергетичну характеристику магнітного поля, неможливо. Тому виникає методична проблема про обґрунтування можливостей визначення характеристик магнітного поля не лише за законом Біо-Савара-Лапласа, який, за суттю, є аналітичним записом принципу суперпозиції для індукції магнітного поля, але й енергетичним шляхом, що, на перший погляд, є проблемним, оскільки магнітне поле вихрове.

Аналіз актуальних досліджень показує, що для магнітного поля можна ввести характеристику, що одержала назву «векторний потенціал», яку відносно легко можна визначити, а потім розрахувати і вектор індукції і яка пов'язана з енергією магнітної взаємодії [1-5]. Найбільш загальний підхід аналізується авторами [1], які розглядають інтеграл дії в електромагнітному полі і опираючись на експериментальне підтвердження, по суті постулюють його аналітичний вигляд і, як наслідок, одержують вираз для векторного потенціалу в електромагнітному полі.

У російському навчальному посібнику [2], який дуже популярний серед викладачів теоретичної фізики, як і у посібниках відомих українських теоретиків [3, 4], потенціали електромагнітного поля вводяться на основі рівнянь Максвелла і в подальшому використовуються для опису стаціонарних полів.

Зазначені підходи до введення потенціалів електромагнітного поля з наукової точки зору є найбільш правильними, але мало адаптованими до лекційної практики викладачів електродинаміки, оскільки занадто загальний підхід не проливає світло на фізичний зміст потенціалів і не обґрунтовує необхідність їх введення і використання.

Отже, питання про введення «енергетичної» характеристики магнітного поля – векторного потенціалу потребує подальшого теоретико-методичного аналізу, який і є **метою даної статті**.

Виклад основного матеріалу. Авторами [5, 6] із дещо різних вихідних позицій запропонована методика обгрунтування релятивістської природи магнітного поля та сили Лоренца і, як наслідок, закону Біо-Савара-Лапласа, за допомогою якого можна розрахувати індукцію магнітного поля:

$$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\left[\vec{j}dV\vec{r}\right]}{r^3} \quad . \tag{I}$$

Зрозуміло, що при довільному розподілі струмів у просторі безпосереднє використання виразу (I) є майже безперспективним завданням. Отже перед студентами викладачем створюється проблемна ситуація про пошук можливих шляхів спрощення складної математичної задачі, до якої призводить вираз (I) навіть у достатньо простих випадках. Викладач звертає увагу на множник $\frac{\vec{r}}{r^3}$ у підінтегральному виразі (де $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений від елемента $\vec{j}dV$ до точки спостереження), з яким студенти дуже часто стикались при розв’язанні задач у курсі «Методи математичної фізики» і, природно, що вираз

$$grad\,\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \quad . \tag{II}$$

вірний для випадку, коли кінець радіус-вектора $\vec{r}$ є фіксованою точкою, а початок – це будь-яка точка у тій області простору, в якій існує електричний струм, добре знайомий. Тому після підстановки (II) в (I) і використання ще однієї відомої формули ($rot\psi\vec{a} = \psi rot\vec{a} - \left[\vec{a}grad\psi\right]$ - у даному випадку $\psi = \frac{1}{r}$ і $\vec{a} = \vec{j}$) підінтегральний вираз у (I) перетвориться до вигляду:

$$\left[\vec{j}grad\,\frac{1}{r}\right]dV = dV(rot\,\frac{\vec{j}}{r} - \frac{1}{r}rot\vec{j})\ .$$

У правій частину $rot\vec{j} = 0$ оскільки густина струму не залежить від координат точки спостереження, а rot – це оператор диференціювання за координатами точки спостереження.

Тоді закон Біо-Савара-Лапласа приймає вигляд:

$$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\left[\vec{j}dV\vec{r}\right]}{r^3} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\int\limits_V rot\,\frac{\vec{j}dV}{r} = rot\left(\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\vec{j}dV}{r}\right)\ .$$

Введемо позначення:

$$\vec{A} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\vec{j}dV}{r} \qquad \text{(III)}$$

і назвемо цю величину векторним потенціалом магнітного поля. Тоді вектор індукції визначиться простим диференціюванням:

$$\vec{B} = rot\vec{A}\,. \qquad \text{(IV)}$$

Ясно, що у такий спосіб індукцію знаходити простіше, ніж безпосередньо за законом Біо-Савара-Лапласа.

Векторний потенціал окремого елемента струму

$$d\vec{A} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}dV}{r}\ , \qquad \text{(V)}$$

як це витікає із (III), направлений так само, як і елемент струму $\vec{j}dV$.

Із аналізу стаціонарного електричного поля студентам відомо, що потенціал електричного поля φ визначається неоднозначно. У випадку електростатичного поля, для усунення неоднозначності потенціалу, його зазвичай нормують на нуль, тобто постулюють $\varphi_\infty = 0$ і вважають, що в однорідному середовищі потенціал та його похідні за координатами неперервні (інакше вони б не задовольняли рівнянням Пуассона і Лапласа). Векторний потенціал $\vec{A}$ магнітного поля визначається теж неоднозначно. Дійсно, якщо потенціал $\vec{A}$ описує поле вектора $\vec{B}$, то й потенціал $\vec{A}' = \vec{A} + grad\psi$ описує це ж поле :

$$rot\vec{A}' = rot\vec{A} + rotgrad\psi = \vec{B},$$

оскільки $rotgrad\psi = 0$, де ψ – будь-яка скалярна функція координат. Але, як видно із останнього виразу, неоднозначність векторного потенціалу не відіграє ніякої ролі при визначенні вектора магнітної індукції.

Рівняння (III, V), зробивши очевидну заміну $\vec{j}dV = Id\vec{l}$, може бути записане також для випадку тонких провідників:

$$\left.\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{Id\vec{l}}{r}, \\ d\vec{A} &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}}{r}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI)}$$

Далі потрібно показати, що векторний потенціал магнітного поля можна знайти не лише за принципом суперпозиції (V, VI), але й шляхом розв’язання відомих рівнянь Пуассона та Лапласа. Для цього, необхідно накласти на векторний потенціал певні умови, які одночасно усунуть неоднозначність векторного потенціалу. Дійсно, підставивши вираз (IV) у рівняння Максвела $rot\vec{B} = \mu\mu_0\vec{j}$, одержуємо:

$$rotrot\vec{A} = \mu\mu_0\vec{j}\ .$$

Використовуючи відому математичну формулу:

$$\left(graddiv\vec{A} - \nabla^2\vec{A} = rotrot\vec{A}\right),$$

останній вираз перепишемо у вигляді:

$$graddiv\vec{A} - \nabla^2\vec{A} = \mu\mu_0\vec{j}\ .$$

Накладемо на векторний потенціал наступну умову (у випадку електричного поля накладається умова $\varphi_\infty = 0$):

$$div\vec{A} = 0\,.$$

Ця умова називається калібруванням векторного потенціалу.

Тоді для області, зайнятої струмами, векторний потенціал є розв’язком рівняння Пуассона

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu\mu_0 \vec{j}\ , \qquad \text{(VII)}$$

а за межами цієї області - рівняння Лапласа

$$\nabla^2 \vec{A} = 0\,. \qquad \text{(VIII)}$$

Як відомо із математики, розв'язки рівнянь Пуассона і Лапласа є однозначними функціями координат, неперервними разом зі своїми похідними. Отже, векторний потенціал в однорідному середовищі є однозначною функцією координат, яка також разом з своїми похідними є неперервною функцією.

Подальше застосування векторного потенціалу для аналізу, наприклад, стаціонарного магнітного поля пов'язане з розрахунком роботи по переміщенню провідників з постійним струмом, яка, в свою чергу, пов'язана із потенціальною енергією , тому маємо: для лінійних струмів $dU = I\vec{A}d\vec{l}$, де ($Id\vec{l}$) – елемент лінійного струму і $dU = \vec{J}\vec{A}dV$ – для об'ємних струмів, де ($\vec{J}dV$) – елемент об'ємного струму. Зазначене дозволяє векторному потенціалу надати й фізичний зміст:

$$A = \frac{dU_{\max}}{Idl}; \qquad A = \frac{dU_{\max}}{JdV}.$$

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок.

Пропонована методика введення векторного потенціалу магнітного поля охвачує всі важливі аспекти цього важливого поняття, не містить надмірної інформації та математичних ускладнень і, як показує досвід викладання електродинаміки, достатньо зрозуміло сприймається студентами.

Але зазначимо, що розглянутий матеріал не вичерпує всіх методичних питань пов'язаних власне з розрахунком векторного потенціалу. Річ у тому, що рівняння Пуассона і Лапласа мають багато лінійно незалежних розв'язків. Отже, питання про вибір одного-єдиного набору характеристик магнітного поля, який відповідає заданій конфігурації струмів, потребує подальшого теоретико-методичного аналізу.

Література

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1973. – 352 с.

2. Мултановский В.В, Василевский А.С.. Курс теоретической физики. Классическая электродинамика. - М.: Просвещение, 1990. – 270 с.

3. Сугаков В.Й. Теоретична фізика. Електродинаміка. - К.: Вища школа., 1974. – 270 с.

4. Федорченко А.М. Теоретична фізика. - т.1: Класична механіка і електродинаміка. - К.: Вища школа., 1992. – 534 с.

5. Мороз І.О. Основи електродинаміки. Магнітостатика: навчальний посібник (гриф МОН України лист №1/11-6715 від 21 липня 2010 р.) / І.О. Мороз. – Суми: Видавництво «МакДен», 2011. – 162 с.

6. Коновал О. А. Теоретичні та методичні основи вивчення електродинаміки на засадах теорії відносності : [монографія] / О. А. Коновал ; Міністерство освіти і науки України ; Криворізький державний педагогічний університет. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2009. – 346 с.

Аннотация. *Рассматривается методика введения и расчета векторного потенциала в курсе «Классическая электродинамика» педагогических университетов.*

Ключевые слова: *уравнения Максвелла, векторный потенциал, уравнение Пуассона и Лапласа.*

Annotation. *The method of writing and calculation of the vector potential in the course of the « Classical electrodynamics» pedagogical universities.*

Keywords*: Maxwell's equations, vector potential, the Poisson equation and Laplace.*