

І.О. Мороз

О.В.Яременко

Л.О.Яременко

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка

ЗАКОН МАКСВЕЛЛА ПРО РОЗПОДІЛ ШВИДКОСТЕЙ МОЛЕКУЛ В КУРСІ ФІЗИКИ

Розглядаючи питання обґрунтування основ молекулярно-кінетичної теорії (МКТ) необхідно підкреслити, що одним із важливих елементів теми є питання про розподіл молекул за швидкостями. Ця тема є досить складною, оскільки крім знань фізики потребує знання елементів теорії ймовірностей. Тому лише після викладення необхідних відомостей із теорії ймовірності (подія, випадкові й закономірні події, ймовірність, теорема про множення ймовірностей, функція розподілу, середні значення тощо) можна перейти до з'ясування основного змісту теми.

Зазначимо, що в середині ХІХ століття саме уявлення про молекули та атоми було лише гіпотетичним, а про експериментальне дослідження розподілу молекул за швидкостями і мови не йшлося. Незважаючи на це, з чисто гіпотетичних, але фізично правдоподібних, міркувань Максвелл правильно розв'язав питання про розподіл молекул за швидкостями і його результати були перевірені в дослідах Штерна в 1920 році.

Розглянемо, які фізичні міркування можуть привести до встановлення максвелівського закону розподілу молекул за швидкостями. Насамперед зазначимо, що рух молекул газу є хаотичним (про це говорять численні досліди; наприклад, тиск газу на всі стінки посудини і окремі її ділянки однаковий), тому функція розподілу не повинна залежати від напрямку руху. Але, оскільки вона є функцією швидкості, то, без сумніву, повинна залежати від швидкості. Ця залежність не може бути лінійною, оскільки швидкість – величина векторна і у випадку лінійної залежності була б залежність функції розподілу від напрямку швидкості. Тому можемо постулювати, що функція розподілу молекул за швидкостями може мати вигляд $f = f(v^2)$.

Виходячи із ймовірнісних міркувань, приходимо до висновку, що кількість молекул, швидкості яких знаходяться в інтервалі від v до $v + dv$, тобто ймовірність того, що довільно взята молекула має швидкість у зазначеному інтервалі, буде виражатися формулою:

$$d\omega = f(v)dv. \quad (1)$$

Аналогічні формули можна записати й для розподілу молекул за проекціями швидкості:

$$\begin{aligned}d\omega_{v_x} &= f(v_x)dv_x; \\d\omega_{v_y} &= f(v_y)dv_y; \\d\omega_{v_z} &= f(v_z)dv_z.\end{aligned}\tag{2}$$

Причому у цих виразах аналітичний вид функцій $f(v_x)$, $f(v_y)$ і $f(v_z)$ повинен бути однаковий, тому що рух молекул хаотичний і всі напрямки рівноправні. Крім того, по цій же причині досить правдоподібним є те, що ймовірність деякої молекули мати проекцію v_x , яка лежить в інтервалі від v_x до $v_x + dv_x$ не залежить від того, які в цієї молекули дві інші проекції швидкості. Тобто, ми маємо справу з незалежними подіями, за допомогою яких реалізується складна подія - швидкість молекули знаходиться в інтервалі від v до $v + dv$. Тому, можна застосувати теорему про множення ймовірностей:

$$d\omega_v = f(v_x)dv_x f(v_y)dv_y f(v_z)dv_z\tag{3}$$

або

$$f(v)dv = f(v_x)dv_x f(v_y)dv_y f(v_z)dv_z.\tag{4}$$

Якщо умовно звести початки векторів швидкості усіх молекул в одну точку, то вони утворять сферичний „їжачок” і, оскільки рух молекул хаотичний, то швидкості молекул в інтервалі від v до $v + dv$ потраплять в об’єм кульового прошарку товщиною dv (рис. 1). При цьому їх проекції попадають у відповідні інтервали своїх значень, наприклад, від v_x до $v_x + dv_x$. Таким чином, можна розглядати гіпотетичний декартовий тривимірний простір, у якому вимірами (осями координат) будуть проекції швидкості v_x, v_y, v_z . У такому просторі інтервали значень проекцій швидкостей молекул (від v_x до $v_x + dv_x$; від v_y до $v_y + dv_y$; від v_z до $v_z + dv_z$) утворюють кульовий прошарок, який можна розглядати як елемент об’єму. Елемент об’єму в декартовій системі координат у такому просторі буде виражатись аналогічно елементу об’єму звичайного тривимірного простору ($dx dy dz$), тобто він дорівнює $dv_x dv_y dv_z$. З іншої сторони, оскільки кінець векторів швидкості молекул, які мають швидкість обмежену інтервалом від v до $v + dv$, попадають в кульовий прошарок товщиною dv , то під множником dv у виразі (4) потрібно розуміти не просто нескінченно малий інтервал швидкості, а величину об’єму $dv_x dv_y dv_z$ цього прошарку в

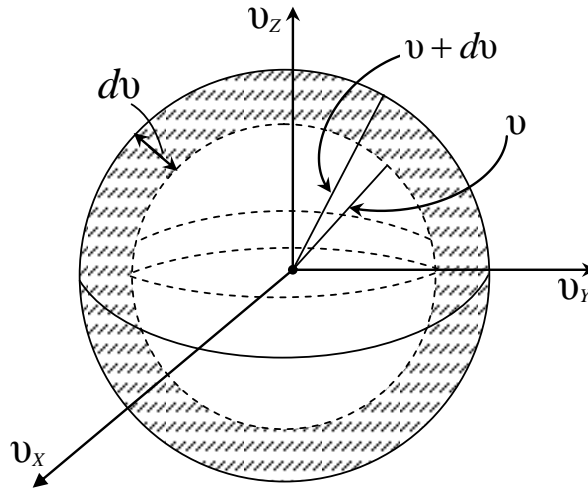


Рис. 3. Трьохвимірний простір швидкостей

просторі, у якому осями координат є v_x , v_y , v_z . Тому, виконавши відповідні скорочення, вираз (4) можна записати у вигляді:

$$f(v) = f(v_x)f(v_y)f(v_z). \quad (5)$$

Якщо прологарифмувати цей вираз

$$\ln f(v) = \ln f(v_x) + \ln f(v_y) + \ln f(v_z),$$

а потім продиференціювати відповідно по v_x, v_y, v_z , то одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(v)} \frac{df(v)}{dv} \frac{\partial v}{\partial v_x} &= \frac{1}{f(v)} \frac{df(v)}{dv} \frac{v_x}{v} = \frac{1}{f(v_x)} \frac{df(v_x)}{dv_x}; \\ \frac{1}{f(v)} \frac{df(v)}{dv} \frac{\partial v}{\partial v_y} &= \frac{1}{f(v)} \frac{df(v)}{dv} \frac{v_y}{v} = \frac{1}{f(v_y)} \frac{df(v_y)}{dv_y}; \\ \frac{1}{f(v)} \frac{df(v)}{dv} \frac{\partial v}{\partial v_z} &= \frac{1}{f(v)} \frac{df(v)}{dv} \frac{v_z}{v} = \frac{1}{f(v_z)} \frac{df(v_z)}{dv_z}; \end{aligned}$$

Тут використано те, що

$$\frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{\partial \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}{\partial v_x} = \frac{v_x}{v},$$

і т.д..

Останні вирази можуть бути подані у вигляді:

$$\frac{1}{f(v)} \frac{df(v)}{v dv} = \frac{1}{f(v_x)} \frac{df(v_x)}{v_x dv_x} = \frac{1}{f(v_y)} \frac{df(v_y)}{v_y dv_y} = \frac{1}{f(v_z)} \frac{df(v_z)}{v_z dv_z}.$$

Записана рівність означає, що функції різних аргументів (v, v_x, v_y, v_z) збігаються у всій області, на якій вони визначені. Це може бути лише у тому випадку, якщо всі вони дорівнюють одній і тій же сталій. Для спрощення викладок позначимо цю сталу (-2α) . Тоді можна записати:

$$\frac{1}{f(v)} \frac{df(v)}{v dv} = \frac{1}{f(v_x)} \frac{df(v_x)}{v_x dv_x} = \frac{1}{f(v_y)} \frac{df(v_y)}{v_y dv_y} = \frac{1}{f(v_z)} \frac{df(v_z)}{v_z dv_z} = -2\alpha$$

Інтегруючи ці вирази, маємо:

$$f(v) = Z e^{-\alpha v^2}, \quad f(v_x) = Z_0 e^{-\alpha v_x^2}, \\ f(v_y) = Z_0 e^{-\alpha v_y^2}, \quad f(v_z) = Z_0 e^{-\alpha v_z^2}.$$

Постійні інтегрування Z_0 для функцій розподілу, які відносяться до різних проекцій швидкості взяті рівними, тому що вид функцій повинен бути однаковий. Очевидно також, що $Z = Z_0^3$.

Постійну Z_0 , отже, й Z , визначимо з умови нормування ймовірності:

$$Z_0 \int_{-v_{x,\max}}^{+v_{x,\max}} e^{-\alpha v_x^2} dv_x = 1$$

Із зростанням величини v_x експонента, яка стоїть під знаком інтеграла, швидко зменшується. Тому межі інтегрування можна замінити на $(\pm\infty)$, що еквівалентно додаванню нульових доданків в інтегральній сумі. Тому останній вираз можна записати наступним чином:

$$Z_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x = 1$$

Використовуючи відомі значення інтегралів Пуассона, маємо Цей інтеграл є одним із інтегралів Пуассона (див. Додаток 1) і він дорівнює $\sqrt{\pi/\alpha^2}$. Тому маємо:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}, \quad Z = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}. \quad (6)$$

Таким чином, ймовірності для проекцій швидкості будуть мати вигляд:

$$d\omega_{v_x} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha v_x^2} dv_x, \\ d\omega_{v_y} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha v_y^2} dv_y, \\ d\omega_{v_z} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha v_z^2} dv_z.$$

Підставляючи ці вирази в (3), одержимо ймовірність того, що довільно взята молекула має швидкість, яка належить до інтервалу від v до $v + dv$:

$$d\omega_v = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\alpha v^2} dv_x dv_y dv_z. \quad (8)$$

У сферичній системі координат елемент об'єму дорівнює $dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\alpha$. У випадку кульового прошарку інтегрування по α і θ дає 4π , тоді цей об'єм буде дорівнювати $(4\pi r^2 dr)$. У даному випадку

радіусом кульового прошарку є величина швидкості U . Отже об'єм кульового прошарку, в який попадають кінці векторів швидкості молекул, що мають модуль швидкості від U до $U + dU$ буде дорівнювати $4\pi U^2 dU$. Тому у виразі (8) можна зробити заміну: $dV_x dV_y dV_z = 4\pi U^2 dU$ і в ньому залишиться невизначеною константа α . Для її визначення розрахуємо тиск газу.

В результаті ударів молекул ділянка площі dS стінки посудини за час dt одержить імпульс

$$dP = 2nmdSdt \int_0^{v_x^{\max}} v_x^2 d\omega_{v_x}.$$

Замінімо верхню границю на нескінченність, після інтегрування одержимо вираз для тиску газу:

$$p = \frac{dP}{dSdt} = \frac{nm}{2\alpha}.$$

Порівнюючи знайдений тиск з відомим із досвіду виразом для тиску ідеального газу $p = nkT$, знаходимо невідому сталу:

$$\alpha = \frac{m}{2kT}.$$

Відмітимо, що невідому сталу a в (5,6) можна знайти й іншим шляхом. Для цього потрібно використати розподіл молекул за швидкостями (6) для знаходження середнього квадрату швидкості і порівняти одержаний результат із середнім квадратом швидкості, який можна визначити із очевидної рівності:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3kT}{2} = \frac{m\langle v^2 \rangle}{2}.$$

Таким чином, розподіл молекул за модулем і компонентами швидкості остаточно можна записати у вигляді:

$$d\omega_v = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv; \quad (7)$$

$$d\omega_{v_x} = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x. \quad (8)$$

За аналогією (8) можна записати розподіл молекул для проекцій швидкості й на інші вісі.

Зрозуміло, що подальший розгляд цієї теми передбачає аналіз залежності функції розподілу від маси молекул та температури, визначення характеристичних швидкостей, розподілу за енергією, імпульсом та його компонентами тощо.

Запропонований метод розгляду розподілу молекул за швидкостями не лише виконує основну роль – одержати вказаний розподіл, але й демонструє можливість його використання для доведення рівняння стану ідеального газу.

Література

1. Дущенко В.П., Кучерук І. М. Загальна фізика: фізичні основи механіки: Молекулярна фізика і термодинаміка: Навч. посібник. - 2-ге вид., перероб. і доп. - К.: Вища шк., 1993. - 431с.: іл.
2. Кікоїн І.К., Кікоїн А.К. Молекулярна фізика: Навчальний посібник для фіз. ін-тів і фак. / Пер. з рос. вид. В.В.Яновського. - К.: Рад. школа, 1968. - 477с.: іл.
3. Мороз І.О., Яременко О.В. Молекулярна фізика: навчальний посібник.-Суми: Видавництво «МакДен», 2010.-376с.
4. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Учебное пособие для студентов физических специальностей вузов. Т.2: Термодинамика и молекулярная физика: - М.: Наука, 1975. - 551с.

Анотація. І.О. Мороз, О.В.Яременко, Л.О.Яременко Деякі аспекти викладання теми «Закон Максвелла про розподіл швидкостей молекул». Розглядаються питання пов'язані з викладанням теми «Розподіл Максвелла молекул за швидкостями» та його застосування до обґрунтування МКТ газів.

Ключові слова. Розподіл, ймовірність, функція розподілу.

Аннотація. И.А.Мороз, А.В.Яременко, Л.А. Яременко. Некоторые аспекты преподавания темы «Закон Максвелла о распределении по скоростям молекул». Рассматриваются вопросы, связанные с изложением темы «Распределение Максвелла молекул по скоростям» и его применение к обоснованию МКТ газов.

Ключевые слова. Распределение, вероятность, функция распределения.

Summary. IA Moroz, AV Yaremenko, LA Yaremenko. Some aspects of teaching about the "Law of Maxwell's velocity distribution of molecules. The questions related to the presentation topic, "The Maxwell distribution of molecules in velocity and its application to the justification ILC gases.

Key words. Distribution, the probability distribution function.