Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки

2012, 1

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics

УДК 519.2

Ф.М. Лиман, д.ф.-м.н.,
Т.Д. Лукашова, к.ф.-м.н.,
М.Г. Друшляк

Скінченні 2-групи з нециклічним центром та недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп

F.M. Lyman, Ph.D.,
T.D. Lukashova, Ph.D.,
M.G. Drushlyak

Finite 2-groups with non-cyclic centre and non-Dedekind norm of Abelian non-cyclic subgroups

Вивчаються скінченні 2-групи з недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп та нециклічним центром. Встановлюється зв'язок між нормами нециклічних та абелевих нециклічних підгруп.

Ключові слова: нормалізатор, норма абелевих нециклічних підгруп, норма нециклічних підгруп.

Finite 2-groups with non-Dedekind norm of Abelian non-cyclic subgroups and non-cyclic centre are studed. Connections between norms of non-cyclic and Abelian non-cyclic subgroups are inverstigated.

Key Words: normalizer, norm of Abelian non-cyclic subgroups, norm of non-cyclic subgroups.

E-mail: marydru@mail.ru
Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, проф. Кириченко В.В.

Одним з основних напрямків у теорії груп є вивчення впливу наперед заданих систем підгруп на структуру групи. В одних випадках група може мати систему підгруп з певними властивостями, але вплив цієї системи підгруп є не суттєвим. В інших випадках наявність єдиної (як правило, характеристичної) підгрупи з певною властивістю може бути визначальним фактором для будови усієї групи. Список таких підгруп можна суттєво розширити, розглядаючи різноманітні Σ-норми групи. Нагадаємо, що Σ-нормою називається перетин нормалізаторів усіх підгруп системи Σ (за умови, що система Σ непорожня). Зрозуміло, що коли Σ-норма збігається з групою, то в останній нормальні всі підгрупи системи Σ.

Уперше ситуацію, коли Σ-норма є власною підгрупою групи, почав вивчати Р.Бер [1] у 1935 році для системи Σ всіх підгруп даної групи. Відповідну Σ-норму він назвав *нормою* групи G та позначив $N(G)$. Згідно з [1] нормою $N(G)$ групи G називатимемо перетин нормалізаторів усіх підгруп групи G.

Звужуючи систему підгруп Σ, можна отримувати ті чи інші Σ-норми, що є узагальненнями норми $N(G)$. Зрозуміло, що всі Σ-норми містять центр групи і є її характеристичними підгрупами. Якщо у якості системи Σ виступає система всіх абелевих нециклічних підгруп, то у відповідності з [2] таку Σ-норму називатимемо нормою абелевих нециклічних підгруп і позначатимемо N_G^A. Якщо група G збігається з нормою N_G^A, то в G нормальними будуть всі абелеві нециклічні підгрупи. Неабелеві групи з такою властивістю вивчалися в [3] і були названі $\overline{HA}$-групами (або $\overline{HA}_2$-групами у випадку 2-груп). Будову скінченних $\overline{HA}_2$-груп описує наступне твердження.

Твердження 1. *([3]). Скінченні негамільтонові $\overline{HA}_2$-групи вичерпуються групами наступних типів:*

1) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle c\rangle$, *де* $|a| = 2^n$, $n \geq 1$, $|b| = |c| = 2$, $[a, b] = [a, c] = 1$, $[b, c] = a^{2^{n-1}}$;

2) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, *де* $|a| = 2^n$, $|b| = 2^m$, $n \geq 2$,

$m \geq 1$, $[a,b] = a^{2^{n-1}}$;

3) $G = (H \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle c \rangle$, *де* $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2$, $|b| = |c| = 2$, $[h_1, h_2] = h_1^2$, $[H, \langle b \rangle] = [H, \langle c \rangle] = E$, $[b, c] = h_1^2$;

4) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)\langle c \rangle$, *де* $|a| = |b| = |c| = 4$, $c^2 = a^2 b^2$, $[c, b] = c^2$, $[c, a] = a^2$;

5) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)\langle c \rangle \langle d \rangle$, *де* $|a| = |b| = |c| = |d| = 4$, $c^2 = d^2 = a^2 b^2$, $[a, c] = [d, c] = a^2$, $[b, d] = b^2$, $[c, b] = [d, a] = c^2$;

6) $G = H \times \langle c \rangle$, *де* H *- група кватерніонів,* $|c| = 2^n$, $n \geq 2$;

7)$G = H \times Q$, *де* H *і* Q *- групи кватерніонів;*

8) $G = (H \times \langle b \rangle)\langle c \rangle$, *де* $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = |b| = |c| = 4$, $[h_1, h_2] = h_1^2 = h_2^2$, $[H, \langle b \rangle] = [H, \langle c \rangle] = E$, $c^2 = b^2 h_1^2$, $[b, c] = b^2$;

9) $G = (\langle h_2 \rangle \times \langle c \rangle)\langle h_1 \rangle$, *де* $|h_1| = |h_2| = 4$, $[h_1, h_2] = h_1^2 = h_2^2$, $|c| = 2^n > 2$, $[c, h_1] = c^{2^{n-1}}$;

10) $G = (H \times \langle b \rangle)\langle c \rangle$, *де* $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $|b| = 2$, $|c| = 8$, $[b, c] = [h_1, h_2] = h_1^2 = h_2^2$, $c^2 = h_1$, $[h_2, c] = b$;

11) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, *де* $|a| = 8$, $|b| = 2^n > 2$, $a^4 = b^{2^{n-1}}$, $a^{-1} b a = b^{-1}$.

У статті досліджуються скінченні 2-групи з нециклічним центром, що мають недедекіндову норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп.

Безпосередньо з твердження 1 отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 1. *Нехай G - скінченна 2-група, що має нециклічний центр та недедекіндову норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп. Тоді N_G^A є групою одного з типів 4)-9) або 2) при $m > 1$ твердження 1.*

Лема 1. *([4]) Якщо Z - центральна нециклічна підгрупа групи G, то у фактор-групі $G/Z = \overline{G}$ має місце включення $\overline{N_G^A} \subseteq N(\overline{G})$, де $N(\overline{G})$-норма групи $\overline{G}$.*

Наступний приклад підтверджує, що рівність $\overline{N_G^A} = N(\overline{G})$ виконується не завжди.

Приклад 1. $G = (\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle) \times \langle c \rangle$, $|a| = 8$, $|b| = 2$, $|c| = 4$, $b^{-1} a b = a^{-1}$. Зрозуміло, що $N_G^A \subseteq N_G(\langle b, c \rangle) \cap N_G(\langle ab, c^2 \rangle) = \langle a^4, b, c \rangle \cap \langle a^4, ab, c \rangle = \langle a^4 \rangle \times \langle c \rangle = Z(G)$. Тому $N_G^A = \langle a^4 \rangle \times \langle c \rangle = Z(G)$.

У фактор-групі $\overline{G} = G/\langle a^4, c^2 \rangle$ норма $N(\overline{G}) = Z(\overline{G}) = \langle \overline{a}^2 \rangle \times \langle \overline{c} \rangle$. Образом норми N_G^A абелевих нециклічних підгруп є $\overline{N_G^A} = \langle \overline{c} \rangle$. Отже, $\overline{N_G^A} \neq N(\overline{G})$.

Позначимо $\omega_m(G)$ підгрупу, породжену елементами порядку не більше 2^m. Зокрема, $\omega_1(G) = \omega(G)$ - нижній шар групи G.

Лема 2. *([4]) Якщо локально скінченна 2-група G має недедекіндову норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп і нижній шар $\omega(N_G^A)$ є центральною нециклічною підгрупою групи G, то $\omega(G) = \omega(N_G^A)$.*

Нециклічною нормою N_G *групи* G будемо називати перетин нормалізаторів усіх нециклічних підгруп даної групи. Зрозуміло, що в загальному випадку має місце включення $N_G \subseteq N_G^A$. Більш точні зв'язки між цими нормами в класі скінченних 2-груп встановлюються нижче.

Теорема 1. *Якщо скінченна 2-група G має недедекіндову норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп та нециклічний центр і не містить групи кватерніонів, то $N_G^A = N_G$.*

Доведення. Оскільки центр групи G нециклічний, то за лемою 2 $\omega(G) = \omega(N_G^A)$. Враховуючи, що група G не містить групи кватерніонів і має нециклічний центр, кожна нециклічна підгрупа, містить нижній шар $\omega(G)$. Тому для кожного елемента x довільної нециклічної підгрупи підгрупа $\langle x, \omega(G) \rangle$ - абелева нециклічна. Отже, кожна нециклічна підгрупа покривається абелевими нециклічними підгрупами і тому $N_G^A = N_G$. Теорему доведено. $\square$

Відсутність групи кватерніонів в групі G є суттєвою вимогою в теоремі 1, що підтверджує наступний приклад.

Приклад 2. $G = Q \leftthreetimes H$, $Q = \langle q_1, q_2 \rangle$, $|q_1| = 2^n$, $n > 2$, $|q_2| = 4$, $q_1^{2^{n-1}} = q_2^2$, $q_2^{-1} q_1 q_2 = q_1^{-1}$, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $[h_1, h_2] = h_1^2 = h_2^2$, $[q_2, h_2] = 1$, $[q_2, h_1] = q_2^2$, $[H, \langle q_1 \rangle] = E$.

У цій групі $N_G^A = \langle q_1^{2^{n-2}} \rangle \times H \neq N_G = \langle h_2 \rangle \leftthreetimes \langle h_1 q_1^{2^{n-2}} \rangle$.

Отже, якщо в локально скінченній p-групі G ($p \neq 2$) з неабелевою нормою N_G^A завжди виконується рівність $N_G^A = N_G$ [4], то в 2-групах ця рівність може не виконуватись як у випадку $G = N_G^A$ (твердження1, група типу 7), так і у випадку $G \neq N_G^A$ (приклад 2).

Лема 3. *Будь-яка скінченна 2-група G експоненти 4 з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп і нециклічним центром є $\overline{HA_2}$-групою.*

Доведення. Нехай група G задовольняє умови леми. Тоді $\omega(N_G^A) = \omega(G)$ - центральна елементарна абелева група порядку 4.

Фактор-група $\overline{G} = G/\omega(G)$ є групою експоненти 2. Отже, $\overline{G}$ - абелева і $G' \subseteq \omega(G)$. Оскільки кожна абелева нециклічна підгрупа групи містить $\omega(G)$, то кожна така підгрупа нормальна в G і G є $\overline{HA_2}$-групою. Лему доведено. □

Наслідок 2. *Нехай G - скінченна 2-група з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп і нециклічним центром. Якщо група G містить елементи порядку 4, що не належать нормі N_G^A, то $expG > 4$.*

Лема 4. *Нехай G - скінченна 2-група з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп і нециклічним центром. Якщо існує елемент $x \in G \backslash N_G^A$, $|x| = 4$, то підгрупа $G_1 = \langle x \rangle N_G^A$ є $\overline{HA_2}$-групою.*

Доведення. Нехай $x \in G \backslash N_G^A$, $|x| = 4$. За лемою 2 $\omega(N_G^A) = \omega(G) \subseteq Z(G)$. Тому $\langle x \rangle \omega(G) \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G^A$ і $G_1' \subseteq \langle x \rangle \omega(G) \cap N_G^A = \omega(G)$. Оскільки кожна абелева нециклічна підгрупа групи G_1 містить $\omega(G)$, то вона нормальна в G_1. Отже, G_1 є $\overline{HA_2}$-групою і лему доведено. □

Існування групи, про яку йдеться в лемі 4, підтверджує приклад 2.

Наслідок 3. *Нехай G - скінченна 2-група з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп і нециклічним центром. Якщо норма N_G^A є групою одного з типів 2) при $n \geq m > 2$, $m > n > 2$, 5), 7), 8) або 6) і 9) при $n > 2$ твердження 1, то $\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G)$ і $\omega_2(N_G^A)$ є підгрупою експоненти 4.*

Доведення. Нехай умови наслідку виконуються та існує елемент $x \in G \backslash N_G^A$, $|x| = 4$. Тоді за лемою 4 $G_1 = \langle x \rangle N_G^A$ є $\overline{HA_2}$-групою. Враховуючи будову норми N_G^A і опис $\overline{HA_2}$-груп, приходимо до протиріччя. Отже, $\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G)$. □

Лема 5. *Якщо в скінченній 2-групі G з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп і нециклічним центром $\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G)$, то група G не містить узагальненої групи кватерніонів порядку більше 8. Якщо при цьому група G містить групу кватерніонів , то $H \subset N_G^A$. Більше того, якщо кожна група кватерніонів нормальна в нормі N_G^A, то $N_G^A = N_G$.*

Наслідок 4. *Нехай G - скінченна 2-група з нециклічним центром та недедекіндовою нормою N_G^A, яка не містить групи кватерніонів. Якщо $\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G)$, то група G також не містить групи кватерніонів і $N_G^A = N_G$.*

Для скорочення викладу скінченні 2-групи з нециклічним центром і недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп будемо називати *групами типу α*, якщо N_G^A - неметациклічна підгрупа, і *групами типу β*, якщо N_G^A - метациклічна підгрупа.

Теорема 2. *Група G є групою типу α тоді і тільки тоді, коли вона є групою одного з наступних типів:*

1) G - неметациклічна недедекіндова $\overline{HA_2}$-група з нециклічним центром, $G = N_G^A$;

2) $G = H \cdot Q$, де H - група кватерніонів порядку 8, Q - узагальнена група кватерніонів, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $[h_1, h_2] = h_1^2 = h_2^2$, $Q = \langle y, x \rangle$, $|y| = 2^n$, $n \geq 3$, $|x| = 4$, $y^{2^{n-1}} = x^2$, $x^{-1}yx = y^{-1}$, $H \cap Q = E$, $[Q, H] \subseteq \langle x^2, h_1^2 \rangle$, $N_G^A = H \times \langle y^{2^{n-2}} \rangle$.

Доведення. Достатність умов теореми неважко перевірити безпосередньо. Доведемо необхідність умов теореми.

Оскільки центр $Z(G)$ нециклічний, то $\omega(N_G^A) \subseteq Z(G)$ і за лемою 2 $\omega(N_G^A) = \omega(G)$. Виходячи з умови теореми та наслідку 1, робимо висновок, що норма N_G^A є групою одного з типів 4)-9) твердження 1.

Продовжимо доведення теореми залежно від будови норми N_G^A.

Лема 6. *Нехай G - група типу α, норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є групою одного з типів 4), 5), 7), 8) та 9) при $n = 2$ твердження 1. Тоді $G = N_G^A$.*

Доведення. Припустимо, що $G \neq N_G^A$ і покажемо, що G - група експоненти 4. Нехай існує елемент $x \in G$, $|x| = 8$.

Якщо при цьому норма N_G^A є групою одного з типів 5), 7) або 8) твердження 1, то за наслідком 3 $\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G)$ і $x^2 \in N_G^A$.

Нехай норма N_G^A є групою одного з типів 4) або 9) при $n = 2$ твердження 1. Припустимо, що $x^2 \notin N_G^A$. З умов $\langle x\rangle\omega(G) \triangleleft G_1 = \langle x\rangle N_G^A$ та $[\langle x\rangle, N_G^A] \subseteq \langle x\rangle\omega(G) \cap N_G^A = \omega(G)$ випливає, що $\langle x^2\rangle \triangleleft G_1$, $[\langle x^2\rangle, N_G^A] = E$ і $x^2 \in Z(G_1)$. Але у такому випадку $\omega(G_1) \neq \omega(N_G^A)$, що неможливо за лемою 2. Отже, $x^2 \in N_G^A$, $[\langle x\rangle, \omega(G)] \subseteq \langle x\rangle\omega(G) \cap N_G^A = \langle x^2\rangle\omega(G)$.

Розглянемо фактор-групу $\overline{G_1} = G_1/\omega(G)$. За доведеним $\overline{G_1}' \subseteq \langle \overline{x}^2\rangle$. Якщо $\overline{G_1}' \neq \overline{E}$, то, враховуючи умови $\overline{x} \notin Z(\overline{G_1})$ і $\langle\overline{x}\rangle \triangleleft \overline{G_1}$, одержимо $[\overline{G_1} : C_{\overline{G_1}}(\langle\overline{x}\rangle)] = 2$. Отже, $\overline{N_G^A}$ містить елемент $\overline{y}$ порядку 2, непереставний з $\overline{x}$. Тоді $\langle\overline{x}, \overline{y}\rangle$ - група діедра порядку 8 і $|\overline{xy}| = 2$. Оскільки $\omega(G)$ - центральна нециклічна підгрупа, то за лемою 1 $\overline{N_G^A} \leq N(\overline{G})$, звідки $\langle\overline{xy}\rangle \triangleleft \overline{G_1}$. Отже, $\overline{G_1}$ - абелева, що неможливо.

Тому $\overline{G_1}' = E$, $G_1' \subseteq \omega(N_G^A)$ і G_1 є $\overline{HA_2}$-групою, що містить центральну циклічну підгрупу порядку 4, що неможливо, враховуючи будову норми N_G^A. Таким чином, G є групою експоненти 4. За лемою 3 G є $\overline{HA_2}$-групою і лему доведено. □

Лема 7. *Нехай G - група типу α, норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є прямим або напівпрямим добутком нормальної циклічної групи порядку більше 4 і групи кватерніонів. Тоді $G = N_G^A$.*

Доведення. Нехай норма N_G^A задовольняє умови леми, тобто є групою типу 6) або 9) при $n > 2$. Припустимо, що $G \neq N_G^A$. Оскільки центр групи G нециклічний, то за лемою 2 $\omega(N_G^A) = \omega(G)$. Окрім того, за наслідком 3 $\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G)$.

Якщо норма N_G^A є групою типу 6) при $n > 2$, то за лемою 5 $N_G^A = N_G$. За теоремою 2 [5] G - $\overline{HA_2}$-група, що є напівпрямим добутком нормальної циклічної підгрупи порядку більше 4 і групи кватерніонів. Отже, $G = N_G^A$ що неможливо.

Нехай норма N_G^A є групою типу 9) при $n > 2$. Тоді за лемою 5 N_G^A містить усі групи кватерніонів. Враховуючи також, що N_G^A нормалізує кожну абелеву нециклічну підгрупу, робимо висновок, що нециклічна норма N_G групи G збігається з нециклічною нормою підгрупи N_G^A, тобто $N_G = N_{N_G^A} = \langle c^2\rangle \times H$, $|c^2| \geq 4$. За теоремою 2 [5], як і в попередньому випадку, G є $\overline{HA_2}$-групою і $G = N_G^A$, що неможливо. Лему доведено. □

Лема 8. *Нехай G - група типу α, норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є групою виду $N_G^A = H \times \langle c\rangle$, де H - група кватерніонів, $|c| = 4$. Тоді або $G = N_G^A$, або G є групою типу 2) теореми 2.*

Доведення. За лемою 2 $\omega(N_G^A) = \omega(G)$. Якщо $N_G^A = \omega_2(G)$, то за лемою 5 $N_G^A = N_G$. За результатами роботи [5] G є $\overline{HA_2}$-групою і $G = N_G^A$.

Отже, надалі будемо вважати, що $N_G^A \neq \omega_2(G)$ і існує елемент $x \in G \backslash N_G^A$, $|x| = 4$. За лемою 4 $G_1 = \langle x\rangle N_G^A$ є $\overline{HA_2}$-групою експоненти 4. Якщо при цьому $[x, c] = 1$, то G_1 містить центральну циклічну підгрупу $\langle c\rangle$ порядку 4, що неможливо за твердженням 1, враховуючи, що $|\omega_2(G_1)| = 64$. Отже, $c \notin Z(G)$.

Якщо при цьому $\langle c\rangle \triangleleft G$, то, враховуючи нецентральність підгрупи $\langle c\rangle$, одержимо $[G : C] = 2$, де $C = C_G(\langle c\rangle)$.

Покажемо, що за цих умов усі елементи, порядок яких більший за 4, переставні з елементом c. Нехай $y \in G\backslash N_G^A$, $|y| = 2^s$, $s > 2$. Якщо $\langle y\rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(G)$, то $[\langle y\rangle, N_G^A] \subseteq \langle y\rangle\omega(G) \cap N_G^A = \omega(G)$ і $[\langle y^2\rangle, N_G^A] = E$. Але у такому випадку $\omega(G) \neq \omega(N_G^A)$, що суперечить лемі 2. Тому $\langle y\rangle \cap N_G^A = \langle y^{2^{s-2}}\rangle$.

Покладемо $y_1 = y^{2^{s-3}}$, $y_1^2 = c^m h^k$, де $h \in H$ і розглянемо групу $G_2 = \langle y_1\rangle N_G^A$. Оскільки $[\langle y_1\rangle, N_G^A] \subseteq \langle y_1\rangle\omega(G) \cap N_G^A = \langle y_1^2\rangle\omega(G)$, то $\langle y_1^2\rangle \triangleleft G_2$. З цього випливає, що або $m \equiv 0(mod 2)$ і $(k, 2) = 1$, або $k \equiv 0(mod 2)$ і $(m, 2) = 1$.

У першому випадку $y_1^2 = c^{2m_1}h^k$, $(k, 2) = 1$. За доведеним вище $[\langle\overline{y}_1\rangle, \overline{N_G^A}] \subseteq \langle\overline{y}_1\rangle \cap \overline{N_G^A} = \langle\overline{y}_1^2\rangle = \langle\overline{h}\rangle$. Нехай h_1 - елемент підгрупи H, непереставний з h. Тоді $[\langle\overline{h}_1\rangle, \langle\overline{y}_1\rangle] = \langle\overline{y}_1^{2l}\rangle = \langle\overline{h}^{kl}\rangle$. Якщо при цьому $(l, 2) = 1$, то $\langle\overline{y}_1, \overline{h}_1\rangle$ - група дiєдра і $|\overline{y}_1\overline{h}_1| = 2$. За лемою 1 $\langle\overline{y}_1\overline{h}_1\rangle \triangleleft \overline{G_2}$, тому $\overline{G_2} = \overline{N_G^A} \times \langle\overline{y}_1\overline{h}_1\rangle$. Отже, $[\overline{y}_1\overline{h}_1, \overline{h}_1] = [\overline{y}_1, \overline{h}_1] = 1$, що неможливо. Таким чином, $(l, 2) \neq 1$ і $[\overline{h}_1, \overline{y}_1] = 1$. Але тоді $[h_1, y_1] \in \omega(N_G^A)$, $[h_1, y_1^2] = [h_1, h] = 1$, всупереч вибору h_1.

Таким чином, $y_1^2 = c^m h^{2k_1}$, де $(m, 2) = 1$, і тому $[y, c] = 1$. Отже, елементи порядок яких більший 4, належать до централізатора C.

Нехай тепер $x \notin C$. Тоді $|x| = 4$. Враховуючи умову $[G : C] = 2$, одержимо $G = C\langle x\rangle$, де $x^2 \in \omega(G)$, $[\langle x\rangle, N_G^A] \subseteq \omega(G)$. За доведеним вище норма N_G^A містить усі елементи четвертого порядку централізатора C, тобто $N_G^A = \omega_2(C)$. Якщо при цьому $expC = 4$, то $N_G^A = C$ і $G = N_G^A \cdot \langle x\rangle$. За лемою 4 G - $\overline{HA}_2$-група відмінна від N_G^A, що неможливо. Отже, $expC > 4$.

Оскільки норма N_C^A підгрупи C містить N_G^A і $c \in Z(C)$, то норма N_C^A є групою одного з типів:

1) $N_C^A = \langle y\rangle \times H$, $|y| = 2^n$, $n \geq 3$, $y^{2^{n-2}} = c$;

2) $N_C^A = \langle y\rangle \leftthreetimes H$, $[\langle y\rangle, H] = \langle y^{2^{n-1}}\rangle$, $|y| = 2^n$, $n \geq 3$, $y^{2^{n-2}} = c$.

За лемою 7 $N_C^A = C$. Розглянемо кожен з випадків окремо.

1. Нехай $C = N_C^A = \langle y\rangle \times H$, тоді $G = (\langle y\rangle \times H)\langle x\rangle$, $x^2 \in C$. Розглянемо фактор-групу $\overline{G} = G/\omega(G) \cong (\langle\overline{y}\rangle \times \overline{H})\langle\overline{x}\rangle$. Оскільки $\langle\overline{y}\rangle = \overline{Z(C)}$, то підгрупа $\langle\overline{y}, \overline{x}\rangle$ містить циклічну підгрупу індекса 2 і можливі наступні співвідношення між $\overline{x}$ та $\overline{y}$.

Якщо $[\overline{y}, \overline{x}] = 1$, то $G' \subseteq \omega(G)$ і G є $\overline{HA}_2$-групою, всупереч умові $G \neq N_G^A$.

Якщо $\overline{x}^{-1}\overline{yx} = \overline{y}^{-1}\overline{y}^{2^{n-2}}$, $n \geq 4$, то переходячи до прообразів, будемо мати $x^{-1}yx = y^{-1}cz$, де $z \in \omega(G)$. Далі $x^{-2}yx^2 = x^{-1}y^{-1}czx = yc^{-2}$, що суперечить умові $x^2 \in Z(G)$.

Якщо $\overline{x}^{-1}\overline{yx} = \overline{yy}^{2^{n-2}}$, де $n \geq 4$, то $|y| \geq 16$, $x^{-1}yx = ycz$, де $z \in \omega(G)$, і $x^{-1}y^2x = y^2c^2$. Оскільки $c \in \langle y\rangle$, то $y^2 = c$ і $|y| = 8$. Протиріччя.

Таким чином, $\overline{x}^{-1}\overline{yx} = \overline{y}^{-1}$. Тоді $G = \langle y\rangle G_1$, де $G_1 = N_G^A\langle x\rangle$ є $\overline{HA}_2$-групою, яка є прямим чи напівпрямим добутком двох груп кватерніонів. Неважко довести, що існує елемент $x_1 \in G_1$, що $x_1^2 = c^2$ і $\langle y, x_1\rangle$ - узагальнена група кватерніонів.

Отже, $G = H \cdot Q$ - група типу 2) теореми 2, де одна з груп H чи Q є узагальненою групою кватерніонів порядку більше 8, а інша - групою кватерніонів, $[H, Q] \subseteq \omega(G)$.

2. Нехай тепер $C = N_C^A = \langle y\rangle \leftthreetimes H$, $[\langle y\rangle, H] = \langle y^{2^{n-1}}\rangle$, $|y| = 2^n$, $n \geq 3$, $y^{2^{n-2}} = c$.

Розглянемо фактор-групу $\overline{G} = G/\omega(G) \cong (\langle\overline{y}\rangle \leftthreetimes \overline{H})\langle\overline{x}\rangle$, де $[\overline{H}, \langle\overline{x}\rangle] = E$, $[\langle\overline{y}\rangle, \langle\overline{x}\rangle] \subseteq \langle\overline{y}, \overline{H}\rangle$. Покладемо $\overline{x}^{-1}\overline{yx} = \overline{y}^{\alpha}\overline{h}^{\beta}$, де $\overline{h} \in \overline{H}$. Тоді з умови $[\overline{x}^2, \overline{y}] = 1$ випливає, що $\overline{x}^{-2}\overline{yx}^2 = (\overline{y}^{\alpha}\overline{h}^{\beta})^{\alpha}\overline{h}^{\beta} = \overline{y}^{\alpha^2}\overline{h}^{\beta(\alpha+1)} = \overline{y}$. Якщо $\beta \equiv 1(mod 2)$, то $\alpha^2 \equiv 1(mod 2^{n-1})$ і $\alpha = \pm 1 + 2^{n-1}t$ або $\alpha = \pm 1 + 2^{n-2}t$. Неважко перевірити, що кожному з випадків $[h_1, (xy)^2] \neq 1$ для елемента $h_1 \in H$, який непереставний з h. З іншого боку, $[h_1, x] \in \omega(G)$, $[h_1, y] \in \omega(G)$. Отже, $[h_1, xy] \in \omega(G)$ і $[h_1, (xy)^2] = 1$. Отримали протиріччя.

Отже, $\beta \equiv 0(mod 2)$ і $\langle\overline{y}\rangle \triangleleft \overline{G}$. Міркуючи аналогічно попередньому випадку отримуємо, що $\overline{x}^{-1}\overline{yx} = \overline{y}^{-1}$. Тоді $G = \langle y\rangle G_1$, де $G_1 = N_G^A\langle x\rangle$ є $\overline{HA}_2$-групою, яка є прямим чи напівпрямим добутком двох груп кватерніонів. Отже, $G = H \cdot Q$ - група типу 2) теореми 2.

Припустимо, що $\langle c\rangle \ntriangleleft G$. Тоді $[\langle c\rangle, G] \subseteq \omega(G)$.

Нехай x - елемент G, такий що $|x| \geq 8$. Якщо $\langle x\rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(G)$, то $[\langle x\rangle, N_G^A] \subseteq \langle x\rangle\omega(G) \cap N_G^A = \omega(G)$ і $[\langle x^2\rangle, N_G^A] = E$. Тоді $G_1 = \langle x^2\rangle N_G^A$ є $\overline{HA}_2$-групою, що має дві центральні циклічні підгрупи $\langle x\rangle$ та $\langle c\rangle$ порядку 4, що суперечить їх опису. Отже, $x^{2^k} = c^\alpha h^\beta$ (де або α, або β не діляться на 2) і $[\langle x\rangle, N_G^A] \subseteq \langle x^{2^k}\rangle\omega(G)$. Оскільки $\langle x^2\rangle \triangleleft G_1$, то або $\alpha \equiv 0(mod 2)$ і $\beta \equiv 1(mod 2)$, або $\alpha \equiv 1(mod 2)$ і $\beta \equiv 0(mod 2)$.

Якщо $\alpha \equiv 0(mod 2)$ і $\beta \equiv 1(mod 2)$, то неважко довести, що $[\langle x\rangle, N_G^A] \subseteq \omega(G)$, тому $[x^2, h_1] = 1$. З іншого боку, $[x^2, h_1] = [c^{2\alpha}h^\beta, h_1] = [h^\beta, h_1] \neq 1$. Отримали протиріччя. Отже, $x^{2^k} = c^\alpha h^{2\beta}$, де $(\alpha, 2) = 1$, звідки $[x, c] = 1$ і $\langle x\rangle \cap N_G^A = \langle ch^{2\beta}\rangle$, де $\beta \in \{0, 1\}$.

Позначимо $N = N_G(\langle c\rangle)$. Зрозуміло, що $N \supseteq N_G^A$ і для будь-якого елемента $y \in G$ $|y| \geq 8$, $y \in N$. Якщо $N \neq G$, то існує елемент $a \in G\backslash N$, такий що $|a| = 4$, $a^2 \in \omega(G)$, $[\langle a\rangle, N_G^A] \subseteq \omega(G)$.

Нехай $a, b \notin N$. Тоді $[a, c] = c^{2r}h^2$, $[b, c] = c^{2s}h^2$, звідки $[ab, c] \in \langle c\rangle$ і $ab \in N$, Неважко довести, що $a^{-1}N = aN = bN$, тому $[G : N] = 2$ і $N \triangleleft G$, $G = N\langle a\rangle$, $a^2 \in \omega(N_G^A)$.

За доведеним вище підгрупа N є добутком групи кватерніонів порядку 8 і узагальненої групи кватерніонів порядку більше 16: $N = H \cdot Q$, $|H| = 8$, $|Q| \geq 16$, $H = \langle h_1, h_2\rangle$, $Q = \langle y, x\rangle$, $|y| = 2^n > 4$, $y^{2^{n-2}} = c$, $[H, Q] \subseteq \omega(G)$.

Якщо $|y| > 8$, то $N' = \langle y^2\rangle \times \langle h^2\rangle \triangleleft G$ і $\langle y^4\rangle \triangleleft G$, $\langle c\rangle \triangleleft G$, що суперечить припущенню. Отже, $|y| = 8$.

Розглянемо фактор-групу $G/N_G^A \cong (\langle\overline{y}\rangle \times \langle\overline{x}\rangle)\langle\overline{a}\rangle$, $|\overline{y}| = |\overline{x}| = |\overline{a}| = 2$. Якщо G/N_G^A неабелева, то вона є групою діедра і містить елемент четвертого порядку виду $\langle\overline{a}\overline{t}\rangle$, де $\overline{t} \in \langle\overline{y}, \overline{x}\rangle$. Зрозуміло, що $|at| > 4$, а, отже, $at \in N$ і $a \in N$, що неможливо. Таким чином, фактор-група G/N_G^A абелева, $[\overline{N}, \langle\overline{a}\rangle] = 1$ і $[y, a] = c^k h^m$ Якщо $m \equiv 0(mod 2)$, то $[y^2, a] = c^{2k} \in \langle c\rangle$, що неможливо, бо у такому випадку $a \in N$. Отже, $m = 1$ і $[y, a] = c^k h$. Звідси $(ya)^2 = ya^2yc^kh = c^{1+k}hz$, $z \in \omega(G)$. З іншого боку, оскільки $|ya| > 4$, то за доведеним $\langle ya\rangle \cap N_G^A \subseteq \langle c\rangle\omega(G)$. Протиріччя. Лему доведено. □

Теорему доведено. □

Теорема 3. *Група G є групою типу β тоді і тільки тоді, коли вона є групою одного з наступних типів:*

1) G - метациклічна недедекіндова $\overline{HA}_2$-група з нециклічним центром, $G = N_G^A = N_G$;

2) $G = \langle x\rangle\langle b\rangle$, $|x| = 2^k$, $|b| = 2^m$, $m > 2$, $k \geq m+r$, $1 \leq r < m-1$, $Z(G) = \langle x^{2^{r+1}}\rangle \times \langle b^{2^{r+1}}\rangle$, $[x, b] = x^{2^{k-r-1}s}b^{2^{m-1}t}$, $(s, 2) = 1$, $0 \leq t < 2$, $N_G^A = N_G = \langle x^{2^{m-1}}\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$.

Доведення. Достатність умов теореми неважко перевірити безпосередньо. Доведемо необхідність умов теореми.

Оскільки норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп недедекіндова і метациклічна, а центр $Z(G)$ - нециклічний, то за наслідком 1 N_G^A є групою типу 2) твердження 1 при $m > 1$:

$N_G^A = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, де $|a| = 2^n$, $|b| = 2^m$, $n \geq 2$, $m > 1$, $[a, b] = a^{2^{n-1}}$.

Продовжимо доведення теореми в наступних лемах.

Лема 9. *Нехай G - група типу β, норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є групою типу 2) твердження 1 при $m > n \geq 2$. Тоді $G = N_G^A = N_G$.*

Доведення. Нехай $G \neq N_G^A$. Якщо $\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G)$, то за наслідком 4 і лемою 5 [5] $G = N_G^A = N_G$, що суперечить припущенню.

Отже, далі будемо вважати, що $\omega_2(N_G^A) \neq \omega_2(N_G^{A)}$. Тоді існує елемент $x \in G\backslash N_G^A$, $|x| = 4$. За лемою 2 $x^2 \in \omega(G)$, $[\langle x\rangle, N_G^A] \subseteq \langle x\rangle\omega(G) \cap N_G^A = \omega(G)$. Тому за лемою 4 $G_1 = \langle x\rangle N_G^A$ є $\overline{HA}_2$-групою.

Виходячи з опису $\overline{HA}_2$-груп з нециклічним центром, G_1 є прямим чи напівпрямим добутком нормальної циклічної підгрупи $\langle y\rangle$ порядку більше 2 та групи кватерніонів H. З цього випливає, що $|a| = |x| = 4$, $|y| = |b|$. Не порушуючи загальності міркувань, можна вважати, що $G_1 = \langle y\rangle \leftthreetimes H$, де $H = \langle x, a\rangle$ - група кватерніонів, $[H, \langle y\rangle] \subseteq \langle b^{2^{m-1}}\rangle$. Виходячи з цього, неважко довести, що для довільного елемента $x \notin N_G^A$, $|x| > 2$ виконується $\langle x\rangle \cap N_G^A \subset \omega(G)$.

Припустимо, що фактор-група $\overline{G} = G/N_G^A$ містить підгрупу $\langle\overline{x}\rangle \times \langle\overline{y}\rangle$, де $|\overline{x}| = |\overline{y}| = 2$. Оскільки $\langle x\rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(G)$ і $\langle y\rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(G)$, то $|x| = |y| = 4$. За доведеним у кожному з суміжних класів xN_G^A та yN_G^A знайдуться такі елементи x_1 та y_1, що $|x_1| = |y_1| = 4$, $x_1^2 = y_1^2 = a^2 = [x_1, a] = [y_1, a]$ та $[x_1, b] = b^{2^{m-1}t}$, $[y_1, b] = b^{2^{m-1}l}$. Оскільки $[\overline{x}, \overline{y}] = 1$, то $[x_1, y_1] \in N_G^A$. Покладемо $[x_1, y_1] = a^r b^s$, тоді $[x_1^2, y_1] = b^{2s}a^{2rs}b^{2^{m-1}ts} = 1$ і $2s(1 + 2^{m-2}t) \equiv 0(mod 2^m)$. Оскільки $m > 2$, то $s \equiv 0(mod 2^{m-1})$, $s = 2^{m-1}s_1$. Отже, $(x_1y_1)^2 = a^{-r}b^{2^{m-1}s_1}$. Якщо $(r, 2) \neq 1$, то $|x_1y_1a^{\frac{-r}{2}}b^{2^{m-1}s_1}| = 2$. У такому випадку і $(x_1y_1a^{\frac{-r}{2}}b^{2^{m-1}s_1}) \in N_G^A$ і $x_1 \in y_1N_G^A$, що неможливо. Нехай $(r, 2) = 1$. Тоді з умови $[x_1y_1, b] = b^{2^{m-1}t}$ випливає $[(x_1y_1)^2, b] = [a^{-r}b^{2^{m-1}s}, b] = [a^r, b] = 1$, що також неможливо. Отже, $\overline{G}$ має єдину інволюцію.

Припустимо, що $|\overline{G}| = 2$, тоді G є $\overline{HA_2}$-групою і $G = N_G^A$, що суперечить припущенню. Отже, фактор-група $\overline{G}$ містить елемент $\overline{g}$ порядку 4. Тоді $|g| = 8$ і за доведеним $\langle g\rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(G)$. Оскільки $[\langle g\rangle, N_G^A] \subseteq \langle g\rangle\omega(G) \cap N_G^A = \omega(G)$, то комутант групи $G_1 = \langle g\rangle N_G^A$ міститься в $\omega(G)$ і G_1 є $\overline{HA_2}$-групою, що неможливо, враховуючи будову N_G^A та опис $\overline{HA_2}$-груп. Лему доведено. □

З наслідків 3 та 4 і леми 5 [5] отримуємо наступну лему.

Лема 10. *Нехай G - група типу β, норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є групою типу 2) твердження 1 при $n \geq m > 2$. Тоді G є групою типу 2) теореми 2.*

Лема 11. *Нехай G - група типу β, норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є групою типу 2) твердження 1 при $n > m = 2$. Тоді $G = N_G^A = N_G$.*

Доведення леми 11 аналогічне доведенню леми 9.

Лема 12. *Нехай G - група типу β, норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є групою типу 2) твердження 1 при $n = m = 2$. Тоді $G = N_G^A = N_G$.*

Доведення. Припустимо, що $G \neq N_G^A$. Нехай x - елемент найменшого порядку групи G, що не належить до норми N_G^A. Тоді $x^2 \in N_G^A$ і за лемою 2 $|x| > 2$. Покладемо $x^2 = a^\alpha b^\beta$. Оскільки $\langle x\rangle\omega(G) \triangleleft G_1 = \langle x\rangle N_G^A$, то $\langle x^2\rangle \triangleleft G_1$, звідки $\beta = 2\beta_1$.

Припустимо, що $(\alpha, 2) = 1$. Оскільки $\omega(G)$ центральна нециклічна підгрупа, то за лемою 1 у фактор-групі $\widetilde{G_1} = G_1/\omega(G)$ $\widetilde{N_{G_1}^A} \subseteq N(\widetilde{G_1})$, тому $\langle\widetilde{x}\rangle \triangleleft \widetilde{G_1}$ і $\widetilde{G_1}' \subseteq \langle\widetilde{x}\rangle \cap \widetilde{N_G^A} = \langle\widetilde{x}^2\rangle = \langle\widetilde{a}\rangle$. Якщо $\widetilde{G_1}' = \widetilde{E}$, то $G_1' \subseteq \omega(G)$ і $[x, b] \in \omega(G)$, $[x^2, b] = 1$, що неможливо. Отже, $\widetilde{G_1}' = \langle\widetilde{a}\rangle$. Тоді $(\widetilde{b}\widetilde{x})^2 = (\widetilde{b}\widetilde{x})(\widetilde{b}\widetilde{x}) = \widetilde{b}^2\widetilde{x}^2\widetilde{a}^t = 1$. Але у такому випадку $\widetilde{b} \notin N_{\widetilde{G}}(\langle\widetilde{b}\widetilde{x}\rangle)$, що неможливо. Отже, $\alpha \equiv 0(mod 2)$ і для довільного елемента $x \in G$, $|x| = 2^k$, $k > 1$, $\langle x\rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(G)$. Якщо при цьому $k > 2$, то $\langle x\rangle \cap N_G^A = \langle a^2b^2\rangle$, бо інакше з умови $[\langle x^2\rangle, N_G^A] = E$ випливає існування елемента порядку 2, що не належить нормі N_G^A.

Нехай $\overline{A}$ - максимальна елементарна абелева підгрупа фактор-групи $\overline{G} = G/N_G^A$, $\overline{x}$ та $\overline{y}$ - довільні елементи з $\overline{A}$. За доведеним вище $x^2 \in \omega(G)$ та $y^2 \in \omega(G)$, тому $[x^2, y] = [x, y^2] = 1$. Покладемо $[x, y] = a^r b^t$. Тоді $(xy)^2 = a^r b^t z$, де $z \in \omega(G)$. Оскільки $(xy)^2 \in \omega(G)$, то $r \equiv t \equiv 0(mod 2)$. Отже, для довільних елементів $x, y \in A$ (A - повний прообраз підгрупи $\overline{A}$), $[x, y] \in \omega(G)$ і $A' \subseteq \omega(G)$. Враховуючи, що кожна абелева нециклічна підгрупа з A містить $\omega(G)$, A є $\overline{HA_2}$-групою експоненти 4. З опису таких груп $|\overline{A}| \leq 4$.

Нехай $|\overline{A}| = 2$. Оскільки $\overline{G}$ нільпотентна, то $Z(\overline{G}) \neq \overline{E}$ і $\overline{G}$ має єдину інволюцію. Отже, $\overline{G}$ або циклічна, або кватерніонна 2-група.

Якщо $\overline{G}$ - циклічна, то $G = \langle x\rangle N_G^A$, $G' \subseteq \omega(G)$. Враховуючи, що кожна абелева нециклічна підгрупа з G містить $\omega(G)$, G є $\overline{HA_2}$-групою і $G = N_G^A$, що суперечить припущенню.

Нехай $\overline{G}$ - кватерніонна 2-група. Тоді вона містить групу кватерніонів $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$ порядку 8, $\overline{x}^2 = \overline{y}^2$. Переходячи до прообразів, покладемо $y^2 = x^2 a^m b^s$. Оскільки $[\langle y \rangle, N_G^A] \subseteq \langle y \rangle \omega(G) \cap N_G^A = \omega(G)$, то $[\langle y^2 \rangle, N_G^A] = E$. Аналогічно $[\langle x^2 \rangle, N_G^A] = E$. Отже, $m \equiv s \equiv 0 (mod 2)$ і $x^2 \in Z(G)$, що неможливо.

Нехай $|\overline{A}| = 4$, $\overline{A} = \langle \overline{x} \rangle \times \langle \overline{y} \rangle$ елементарна абелева підгрупа порядку 4. Якщо $\overline{A} = \overline{G}$, то $G' \subseteq \omega(N_G^A)$ і G є $\overline{HA_2}$-групою, тобто $G = N_G^A$, що неможливо за припущенням.

Нехай $\overline{A} \neq \overline{G}$. Позначимо $\overline{N} = N_{\overline{G}}(\overline{A})$. Тоді $[\overline{N} : C_{\overline{N}}(\overline{A})] = 2$. Група $C_{\overline{N}}(\overline{A})$ не містить нециклічних абелевих підгруп порядку 8, оскільки повний прообраз такої групи є $\overline{HA_2}$-групою, що неможливо, враховуючи твердження 1. Тоді $C_{\overline{N}}(\overline{A}) = \overline{A}$ і $\overline{N} = C_{\overline{N}}(\overline{A}) \langle \overline{x}_1 \rangle$, де $\overline{x}_1^2 \in C_{\overline{N}}(\overline{A})$.

Отже, $\overline{N} = \overline{A} \langle \overline{x_1} \rangle = (\langle \overline{x} \rangle \times \langle \overline{y} \rangle) \langle \overline{x}_1 \rangle = \langle \overline{x}_2 \rangle \leftthreetimes \langle \overline{y} \rangle$, $|\overline{x}_2| = 4$, $[\overline{x}_2, \overline{y}] = \overline{x}_2^2 = \overline{x}$.

Позначимо $\overline{N}_1 = N_{\overline{G}}(\langle \overline{x}_2 \rangle)$. Оскільки $[\overline{N}_1 : C_{\overline{N}_1}(\langle \overline{x}_2 \rangle)] = 2$ і $\overline{y} \notin C_{\overline{N}_1}(\langle \overline{x}_2 \rangle)$, то $\overline{N}_1 = C_{\overline{N}_1}(\langle \overline{x}_2 \rangle) \leftthreetimes \langle \overline{y} \rangle$, де $C_{\overline{N}_1}(\langle \overline{x}_2 \rangle)$ - циклічна підгрупа. Отже, $\overline{N}_1 = \langle \overline{z} \rangle \leftthreetimes \langle \overline{y} \rangle$ і $\overline{x}_2 \in \langle \overline{z} \rangle$. Тоді $\overline{N}_1' = \langle \overline{z}^2 \rangle$ і тому $\langle \overline{x}_2 \rangle$ - характеристична підгрупа групи $\overline{N}_1$.

Покладемо $\overline{N}_2 = N_{\overline{G}}(\overline{N}_1)$, тоді $\langle \overline{x}_2 \rangle \triangleleft \overline{N}_2$ і $\overline{N}_2 \subseteq N_{\overline{G}}(\langle \overline{x}_2 \rangle) = \overline{N}_1$. Це можливо лише за умови, що $\overline{N}_1 = \overline{G} = \langle \overline{z} \rangle \leftthreetimes \langle \overline{y} \rangle$, $|\overline{z}| = 2^k > 2$, $|\overline{y}| = 2$, $\overline{y}^{-1} \overline{zy} = \overline{z^{-1+2^{k-1}t}}$, $t \in \{0, 1\}$. Покажемо, що $t = 0$. Для довільного елемента $g \in \langle z, y \rangle$, $|g| \geq 8$ мають місце співвідношення $[g^2, N_G^A] = 1$ та $\langle g \rangle \cap N_G^A = \langle a^2 b^2 \rangle$. Нехай $z_1 = z^{2^{k-1}}$ і $y^{-1} z y = z^{-1} z_1 a^\alpha b^\beta$, де z та y - прообрази елементів $\overline{z}$ та $\overline{y}$ відповідно. Оскільки $|z| > 8$, то $|zy| = 8$ і $(zy)^4 = a^2 b^2 = a^2 b^2 a^{2\alpha + 2\beta\alpha} b^{2\beta}$. Таким чином, $\alpha \equiv \beta \equiv 0 (mod 2)$ та $y^{-1} z y = z^{-1} z_1 a_1$, де $a_1 \in \omega(G)$. Оскільки $[z_1, y] \in \omega(G)$, покладемо $[z_1, y] = a_2$, де $a_2 \in \omega(G)$. Враховуючи, що $y^2 \in \omega(N_G^A)$, маємо $y^{-2} z y^2 = y^{-1} z^{-1} z_1 a_1 y = z a_2 = z$. Отже, $a_2 = 1$ і $z_1 \in Z(G)$, що неможливо. Таким чином, $\overline{y}^{-1} \overline{zy} = \overline{z^{-1}}$. Перейдемо до прообразів - $y^{-1} z y = z^{-1} a^l b^s$. Оскільки $\langle zy \rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(N_G^A)$ та $(zy)^2 = y^2 a^l b^s \in N_G^A$, то $l \equiv s \equiv 0 (mod 2)$ і $y^{-1} z y = z^{-1} a^{2l} b^{2s} = z^{-1} z_2$, де $z_2 \in \omega(N_G^A)$.

Виходячи з умов $[\langle z \rangle, N_G^A] \subseteq \omega(G)$, $[z^{2^{k-1}}, y] \in \omega(G)$, робимо висновок, що $[\langle z^{2^{k-1}} \rangle, G] \subseteq \omega(G)$. Оскільки кожна абелева нециклічна підгрупа групи G містить $\omega(G)$, то елемент $z^{2^{k-1}}$ порядку 4 нормалізує кожну таку підгрупу. Це означає, що $z^{2^{k-1}}$ належить нормі N_G^A. Маємо протиріччя. Отже, $G = N_G^A$. Лему доведено. $\square$

Теорему доведено. $\square$

З теорем 12 і 16 та теореми [2] випливає наступний наслідок.

Наслідок 5. *Будь-яка 2-група G з нециклічним центром та недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп тоді і тільки тоді не містить підгрупи кватерніонів, коли такої підгрупи не містить норма N_G^A.*

Список використаних джерел

1. Baer R. Der Kern, eine Charakteristische Untergruppe //Comp. Math.-1935.-1.-S.254-283.

2. Лиман Ф.М., Лукашова Т.Д. Про нескінченні 2-групи з недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп // Вісник Київського університету, серія "Фіз.-мат. науки". - 2005. - №1. - С.56-64.

3. Лиман Ф.Н. 2-групи с инвариантными нециклическими подгруппами // Мат. Заметки. - 1968. - 4, №1. - С. 75-83.

4. Друшляк М.Г. Конечные p-группы ($p \neq 2$) с неабелевой нормой абелевых нециклических подгрупп // Известия Гомельского университета имени Ф.Скорины.- 2010.-№1(58).-С.192-197.

5. Лукашова Т.Д. Конечные 2-группы с недедекиндовой нормой нециклических подгрупп // Известия Гомельского гос-го ун-та им.Ф.Скорины. Вопросы алгебры. - 2001. - №3(6). - С. 139-150.

Надійшла до редколегії 26.09.2011