УДК 511.72+519.21

ОСНОВИ МЕТРИЧНОЇ ТЕОРІЇ ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ ЗНАКОЗМІННИМИ РЯДАМИ ЛЮРОТА ТА НАЙПРОСТІШІ ЗАСТОСУВАННЯ

М.В. Працьовитий, Ю.В. Хворостіна

Анотація. У даній роботі обґрунтовується, що довільне дійсне число $x \in (0,1]$ можна єдиним чином подати у вигляді знакозмінного ряду Люрота

$$x = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1)\dots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n} + \dots, \text{ де } a_n \in \mathbb{N}.$$

Вивчено властивості циліндричних множин, геометричний зміст цифр, основне метричне відношення. Доведено метричну незалежність циліндрів $\widetilde{L}$-зображення. Описано тополого-метричні властивості множин з обмеженими $\widetilde{L}$-символами. Знайдено необхідні і достатні умови дискретності та канторовості розподілу випадкових величин з незалежними елементами розподілів в знакозмінні ряди Люрота.

Abstract. In this paper we prove that any real number $x \in (0,1]$ can be uniquely represented in the from of alternating Luroth series

$$x = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1)\dots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n} + \dots, \text{ where } a_n \in \mathbb{N}.$$

We studied the properties of cylindrical sets, geometric interpretation of digits, basic metric relation. We have proved metric independence of cylinders of $\widetilde{L}$-expansion. Metric and topological properties of sets with limiting $\widetilde{L}$-symbols. We have derived necessary and sufficient conditions for the discrete and Cantor distribution of random variables represented by the alternating Lüroth series with independent elements.

Ключові слова: зображення чисел знакозмінними рядами Люрота, геометрія $\widetilde{L}-$зображення, напівциліндри, множин з обмеженими $\widetilde{L}$-символами, випадкові величини з незалежними $\widetilde{L}-$символами, дискретний розподіл, розподіл канторівського типу.

Вступ

Метрична теорія чисел — один з класичних і в той же час бурхливо прогресуючих розділів теорії чисел, який має як самостійне значення, так і глибокі зв'язки з ергодичною теорією динамічних систем, теорією ймовірностей, теорією кодування та фрактальною геометрією. Найбільш багатими є метричні теорії систематичних (s-адичних) та ланцюгових дробів. Менш розвинутими є метричні теорії зображення чисел рядами, членами яких є числа, обернені до натуральних. Це зображення чисел знакододатними рядами: Енгеля [15], Люрота [5], [9], Сільвестра [11] та знакозмінними рядами: Остроградського-Серпінського-Пірса [1], [10], [12], Люрота [7], [8], Остроградського 2-го виду [13], [14] тощо. Всі ці зображення мають, взагалі кажучи, різну геометрію (геометричне значення цифр, властивості циліндричних множин, метричні співвідношення та інші). Топологія ж усіх вказаних зображень знакозмінними рядами є однаковою і спільною з зображеннями чисел ланцюговим дробом.

Дана робота присвячена розвитку метричної теорії представлення дійсних чисел знакозмінними рядами Люрота. Ще в 1883 році Jacob Lüroth знайшов розклади дробової частини дійсного чисел у знакододатні ряди спеціального виду, а в 1990 році Sofia Kalpazidou, Arnold Knopfmacher і John Knopfmacher [7] запропонували знакозмінний анолог розкладів Люрота. Вони довели, що довільне дійсне число $x \in (0,1]$ можна подати у вигляді скінченного або нескінченного знакозмінного ряду Люрота

$$x = \frac{1}{a_1} + \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1)\dots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n},\ a_n \in N,$$

причому кожне ірраціональне число має єдине зображення, яке є нескінченним і неперіодичним, а кожне раціональне число має або скінченне, або періодичне зображення. Цією ж групою авторів у 1991 році в роботі [8] було проведено дослідження деяких метричних властивостей, зокрема, встановлено існування майже скрізь константи типу Хінчина, асимптотичної частоти для будь-якого заданого значення цифр і точної оцінки діофантового наближення. Але систематичного викладу тополого-метричної, фрактальної і ймовірнісної теорій зображень чисел знакозмінними рядами Люрота сьогодні не існує. Плануючи його здійснити, в даній роботі ми висвітлюємо геометрію даного зображення, будуємо основи метричної теорії і вказуємо на найпростіші застосування в теорії розподілів випадкових величин.

1. Розклад дійсного числа у знакозмінний ряд Люрота

З метою цілісності викладу у цьому пункті ми наводимо відомі результати дослідження розкладу дійсного числа $x \in (0,1]$ у знакозмінний ряд Люрота. При цьому крім відомого компактного доведення теореми 1 ми наводиво своє "більш геометричне"доведення.

Теорема 1. *Для довільного дійсного числа $x \in (0,1]$ існує скінченний набір натуральних чисел $(a_1, a_2, ..., a_n)$ або нескінченна послідлвність (a_n) таких, що*

$$x = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1)\dots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n} + \dots \quad .$$

Доведення 1. Нехай x довільне дійсне число з $(0;1]$ і

$$a_1 = \left[\frac{1}{x}\right], \quad x_1 = \left(\frac{1}{a_1} - x\right) a_1(a_1+1).$$

Тоді рекурсивно задамо

$$a_{n+1} = \left[\frac{1}{x_n}\right] \geq 1,$$

$$x_{n+1} = \left(\frac{1}{a_{n+1}} - x_n\right) a_{n+1}(a_{n+1}+1).$$

Причому, $0 \leq x_n < 1$, що легко побачити з нерівності $\frac{1}{a_{n+1}+1} < x_n \leq \frac{1}{a_{n+1}}$.

Алгоритм зупиняє дію при $x_n = 0$, в іншому випадку дія алгоритму є нескінченною. (Наведений вище алгоритм запропонований S. Kalpazidou, A. Knopfmacher, і J. Knopfmacher [7])

Повторне використання описаного вище алгоритму дає такий результат:

$$x = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)} \cdot x_1 = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2} + \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)} \cdot x_2 = \dots =$$

$$= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2} + \dots + \frac{(-1)^k}{a_1(a_1+1)\dots a_k(a_k+1)} \cdot x_k.$$

Оскільки, $a_n \geq 1$ для всіх $n \geq 1$, то

$$\frac{x_n}{a_1(a_1+1)\dots a_n(a_n+1)} \leq \frac{1}{2^n} \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Звідси випливає, що x має знакозмінний розклад в ряд Люрота. □

Доведення 2. Нехай x довільне дійсне число з $(0;1]$.

Очевидно, що існує $a_1 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\frac{1}{a_1+1} < x \leq \frac{1}{a_1}, \text{ тоді}$$

$$\frac{1}{a_1+1} - \frac{1}{a_1} = -\frac{1}{a_1(a_1+1)} < x - \frac{1}{a_1} \leq 0.$$

Якщо $x - \frac{1}{a_1} = 0$, тоді $x = \frac{1}{a_1}$.

Якщо $x_1 = x - \frac{1}{a_1} < 0$, тоді $|x_1| < \frac{1}{a_1(a_1+1)}$.

Очевидно, що існує $a_2 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$-\frac{1}{a_1(a_1+1)a_2} \leq x_1 < -\frac{1}{a_1(a_1+1)(a_2+1)} \text{ тоді}$$

$$0 \leq x_1 + \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2} < -\frac{1}{a_1(a_1+1)(a_2+1)} + \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2} = \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)}.$$

Якщо $x_1 + \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2} = 0$, тоді $x = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2}$.

Якщо $x_2 = x_1 + \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2} > 0$, тоді $|x_2| < \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)}$.

Очевидно, що існує $a_3 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\frac{1}{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)(a_3+1)} < x_2 \leq \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)a_3}.$$

Тоді

$$-\frac{1}{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)a_3(a_3+1)} < x_2 - \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)a_3} \leq 0.$$

Якщо $x_2 - \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)a_3} = 0$, тоді $x = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2} + \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)a_3}$.

Якщо $x_3 = x_2 - \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)a_3} < 0$, тоді $|x_3| < \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)a_3(a_3+1)}$,

і т. д.

Оскільки $|x_n| \to 0$, при $n \to \infty$, то маємо збіжність процесу і отримаємо

$$x = \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1)\dots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n}.$$

□

Якщо число x розкладається в скінченну суму, то це символічно записуватимемо $x = \widetilde{L}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, якщо ж число x розкладається в ряд, то $x = \widetilde{L}(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$. Вказаний скорочений запис представлення дійсного числа знакозмінним рядом Люрота називатимемо $\widetilde{L}$-зображенням.

Теорема 2. *Дійсне число $x \in (0,1]$ є раціональним тоді і тільки тоді, коли його $\widetilde{L}$-зображення є скінченним або періодичним.*

Доведення. Якщо розклад числа x скінченний, то x як результат скінченної кількості арифметичних операцій над цілими числами, є раціональним.

Нехай $a_n = a_{n+k}$ для деякого $k \in N$, починаючи з деякого $n \geq 1$. Використовуючи позначення

$$s_n = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)} \cdot \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{(-1)^{n-2}}{a_1(a_1+1)\dots a_{n-2}(a_{n-2}+1)} \cdot \frac{1}{a_{n-1}}$$

і поклавши $g_n = (a_1+1)a_1 \dots (a_n+1)a_n$ та $g_* = g_{n+k-1}/g_{n-1}$, маємо

$$\begin{aligned}
x = s_n + &\frac{(-1)^{n-1}}{g_{n-1}} \Bigg\{ \Bigg(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{(a_n+1)a_n} \cdot \frac{1}{a_{n+1}} + \dots \\
&+ \frac{(-1)^{k-1}}{(a_n+1)a_n \dots (a_{n+k-2}+1)a_{n+k-2}} \cdot \frac{1}{a_{n+k-1}} \Bigg) + \\
&+ (-1)^k \Bigg(\frac{1}{g_* a_n} - \frac{1}{g_*(a_n+1)a_n} \cdot \frac{1}{a_{n+1}} + \dots \\
&+ \frac{(-1)^{k-1}}{g_*(a_n+1)a_n \dots (a_{n+k-2}+1)a_{n+k-2}} \cdot \frac{1}{a_{n+k-1}} \Bigg) + \\
&+ (-1)^{2k} \Bigg(\frac{1}{g_*^2 a_n} - \frac{1}{g_*(a_n+1)a_n} \cdot \frac{1}{a_{n+1}} + \dots \Bigg) + \dots \Bigg\} = \\
= s_n + &\frac{(-1)^{n-1}}{g_{n-1}} \Bigg(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{(a_n+1)a_n} \cdot \frac{1}{a_{n+1}} + \dots \\
&+ \frac{(-1)^{k-1}}{(a_n+1)a_n \dots (a_{n+k-2}+1)a_{n+k-2}} \cdot \frac{1}{a_{n+k-1}} \Bigg) \times \\
&\times \left(1 + \frac{(-1)^k}{g_k} + \frac{(-1)^{2k}}{g_k^2} + \dots + \frac{(-1)^{nk}}{g_k^n} + \dots \right).
\end{aligned}$$

Останній множник є сумою нескінченно спадної геометричної прогресії, яка є раціональним числом. Тому число x також є раціональним.

Навпаки, припустимо, що $x = p/q$ — раціональне число, де $p, q \in N$, $p < q$. Тоді кожне x_n є раціональним і

$$x_n = a_n + 1 - (a_n+1)a_n x_{n-1} = a_n + 1 - (a_n+1)a_n(a_{n-1}+1-(a_{n-1}+1)a_{n-1}x_{n-2}) = \ldots =$$
$$= bx_1 + c = b(a_1 + 1 - \frac{p}{q}(a_1+1)a_1) + c = \frac{p_n}{q}, \quad \text{де} \quad b, c \in Z.$$

Оскільки $0 \le x_n < 1$ для всіх n, то або $x_n = 0$ для деякого n, і в цьому випадку розклад скінченний, або ж для кожного n

$$x_n \in \left\{\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q}\right\}$$

і тому існують $k, n \in N$ такі, що $x_n = x_{n+k}$. Тоді алгоритм, застосований до x_{n+k}, дає такі самі елементи знакозмінного ряду Люрота, як і застосований до x_n, тобто елементи стають періодичними. $\square$

Зазначимо, що для раціональних чисел зі скінченним розкладом можлива неоднозначність останнього члена, аналогічна неоднозначності, яка має місце у випадку ланцюгових дробів. Щоб усунути неоднозначність, ми будемо використовувати заміну зображення $\widetilde{L}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 1)$ зображенням $\widetilde{L}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}+1)$ у випадку $a_n = 1$.

Для спрощення виконання операції порівняння чисел

Для того, щоб можна було порівнювати скінченні розклади різної довжини за величиною, вводиться символ ω з властивістю $n < \omega$ для будь-якого $n \in N$. Ми можемо тепер зобразити скінченні послідовності нескінченними послідовностями таким чином: для кожного $x = \widetilde{L}(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ покладемо $a_j = \omega$ для $j > n$ і тоді $x = \widetilde{L}(a_0, a_1, \ldots, a_n, \omega, \omega, \ldots)$.

Теорема 3 (Властивість порядку)**.** *Нехай $x = \widetilde{L}(a_1, a_2, \ldots)$, $y = \widetilde{L}(b_1, b_2, \ldots)$ і $x \ne y$. Тоді $x < y$ тоді і тільки тоді, коли існує таке*

$$\text{(i)} \quad a_{2n} < b_{2n} \quad \text{або} \quad \text{(ii)} \quad a_{2n+1} > b_{2n+1},$$

причому $i = 2n$ або $i = 2n+1$ є першим індексом $i \ge 0$ таким, що $a_i \ne b_i$.

Доведення. Розглянемо залишки рядів Люрота

$$r_k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(a_1+1)a_1 \ldots (a_{n-1}+1)a_{n-1}} \cdot \frac{1}{a_n}.$$

За наслідком з теореми Лейбніца про збіжність знакозмінних рядів залишок знакозмінного збіжного ряду має знак свого першого члена і менший від нього по абсолютній величені.

Тоді, використавши позначення $g_n = (a_1+1)a_1 \ldots (a_n+1)a_n$, маємо

$$|r_k| < \frac{1}{g_{k-1}} \cdot \frac{1}{a_k}.$$

Також

$$|r_k| = \frac{1}{g_{k-1}}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{(a_k+1)a_k}\cdot\frac{1}{a_{k+1}} + \frac{1}{(a_k+1)a_k(a_{k+1})a_{k+1}}\cdot\frac{1}{a_{k+2}} - \dots\right) \geq$$
$$\geq \frac{1}{g_{k-1}}\left(\frac{1}{a_k}\left(1-\frac{1}{(a_k+1)}\right) + \frac{1}{(a_k+1)a_k(a_{k+1})a_{k+1}a_{k+2}}\left(1-\frac{1}{a_{k+2}+1}\right)+\dots\right) >$$
$$> \frac{1}{g_{k-1}}\left(\frac{1}{a_k}\left(1-\frac{1}{(a_k+1)}\right)\right) = \frac{1}{g_{k-1}}\cdot\frac{1}{a_k+1}.$$

Розглянемо випадок (i). Тоді $a_i = b_i, \quad i = \overline{1,\, 2n-1}, \quad a_{2n} < a_{2n}+1 \leq b_{2n}$.

$$y - x = r_{2n}^y - r_{2n}^x = |r_{2n}^x| - |r_{2n}^y| >$$
$$> \frac{1}{g_{k-1}}\cdot\frac{1}{a_{2n}+1} - \frac{1}{g_{k-1}}\cdot\frac{1}{b_{2n}} = \frac{1}{a_{2n}+1} - \frac{1}{b_{2n}} \geq 0.$$

Твердження доводиться аналогічним чином, якщо має місце випадок (ii).

□

2. Геометрія $\widetilde{L}$-зображення чисел

Означення 1. Нехай $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ — заданий набір натуральних чисел. *Циліндром рангу n з основою $c_1c_2\dots c_n$* називається множина $\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\dots c_n}$ всіх $x \in (0,1]$ виду $x = \widetilde{L}(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, або $x = \widetilde{L}(a_1, a_2, \dots, a_n), a_i = c_i, i = \overline{1,n}$.

Циліндричні множини мають наступні властивості.

1. $\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\dots c_n} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\dots c_n i}$.
2. $\inf \Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\dots c_{2m-1}} = \widetilde{L}(c_1, \dots, c_{2m-1}) - \frac{1}{c_1(c_1+1)\dots c_{2m-1}(c_{2m-1}+1)} =$
   $= \widetilde{L}(c_1, \dots, c_{2m-1}, 1) = \widetilde{L}(c_1, \dots, c_{2m-2}, c_{2m-1}+1) \notin \Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\dots c_{2m-1}}$;
   $\sup \Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\dots 2m-1} = \widetilde{L}(c_1, \dots, c_{2m-1}) \in \Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\dots c_{2m-1}}$;
   $\inf \Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\dots 2m} = \widetilde{L}(c_1, \dots, c_{2m}) \in \Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\dots c_{2m}}$;
   $\sup \Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\dots 2m} = \widetilde{L}(c_1, \dots, c_{2m}) + \frac{1}{c_1(c_1+1)\dots c_{2m}(c_{2m}+1)c_{2m}} =$
   $= \widetilde{L}(c_1, \dots, c_{2m}, 1) = \widetilde{L}(c_1, \dots, c_{2m-1}, c_{2m}+1) \notin \Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\dots c_{2m}}$.
3. $\sup \Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\dots c_{2m-1}i} = \inf \Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\dots c_{2m-1}(i+1)}$;
   $\inf \Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\dots c_{2m}i} = \sup \Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\dots c_{2m}(i+1)}$.

Нехай $l_1 = \widetilde{L}(c_1, \dots, c_n+1), l_2 = \widetilde{L}(c_1, \dots, c_n)$.

Лема 1. *Циліндр $\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\dots c_n}$ є півінтервалом $(l_1, l_2]$, якщо n – непарне, або піввідрізок $[l_2, l_1)$, якщо n – парне.*

Доведення. Розглянемо випадок, коли n – непарне, а саме $n = 2m-1$.

Очевидно, що $\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\dots c_n} \subset (l_1, l_2]$. Доведемо, що $(l_1, l_2] \subset \Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\dots c_n}$. Оскільки $l_2 \in \Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\dots c_n}$, то досить показати, що довільне $x = \widetilde{L}(x_1, \dots, x_n, \dots) \in (l_1, l_2)$ належить $\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\dots c_n}$.

Взагалі кажучи, розклади чисел l_1, l_2 і числа x можуть мати різну довжину, тому для їх порівняння зобразимо числа l_1, l_2 наступним чином

$$l_1 = \widetilde{L}(c_1, \ldots, c_{2m+1} + 1, \omega, \omega, \ldots, \omega), \quad l_2 = \widetilde{L}(c_1, \ldots, c_{2m+1}, \omega, \omega, \ldots, \omega),$$

де $\quad \omega > x_n, \quad n \geq 1.$

Оскільки $l_1 < x < l_2$, то x в $\widetilde{L}$-зображенні має $x_i = c_i, \quad i = \overline{1, 2m}, \quad$ і

$$\text{або} \quad x_{2m+1} = c_{2m+1} + 1, \quad \text{або} \quad x_{2m+1} = c_{2m+1}.$$

Якщо $x_{2m+1} = c_{2m+1} + 1$, то $l_1 > x$ за теоремою 4, бо $\omega > x_{2m+2}$.

Тому $x_{2m+1} = c_{2m+1}$ і за теоремою 4 справедливі нерівності $l_1 < x < l_2$.

Аналогічно для випадку $n = 2m$ у $\widetilde{L}$-зображенні числа x для $i = \overline{1, 2m}$ виконуватиметься рівність $x_i = c_i$.

Таким чином, x має наступне $\widetilde{L}$-зображення $x = \widetilde{L}(c_1, \ldots, c_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$, а отже, $x \in \Delta^{\widetilde{L}}_{c_1 \ldots c_n}$, що й вимагалось довести. $\square$

Наслідок 1. *Для довжини циліндра рангу n має місце співвідношення:*

$$\mathrm{diam}\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1 \ldots c_n} \equiv |\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1 \ldots \ldots c_n}| = \frac{1}{c_1(c_1+1)\ldots c_n(c_n+1)} \leq \frac{1}{2^n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Вираз довжини циліндра $\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ дозволяє отримати ряд метричних відношень, які лежать в основі метричної "геометрії" зображення чисел знакозмінними рядами Люрота.

Лема 2. *Якщо $\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ — фіксований циліндр, то має місце рівність (основне метричне відношення)*

$$\frac{|\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1 c_2 \ldots c_n i}|}{|\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1 c_2 \ldots c_n}|} = \frac{1}{i(i+1)}.$$

Справді,

$$\frac{|\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1 c_2 \ldots c_n i}|}{|\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1 c_2 \ldots c_n}|} = \frac{c_1(c_1+1)\ldots c_n(c_n+1)}{c_1(c_1+1)\ldots c_n(c_n+1)i(i+1)} = \frac{1}{i(i+1)}.$$

Наслідок 2. *Має місце рівність:*

$$\frac{|\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1 c_2 \ldots c_n 1}|}{|\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1 c_2 \ldots c_n}|} = \frac{1}{2}.$$

Очевидно, що значення основного метричного відношення залежить лише від останнього символа в основі циліндра.

Враховуючи основне метричне відношення і наслідок 2, отримуємо

$$\frac{|\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1 c_2 \ldots c_n i}|}{|\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1 c_2 \ldots c_n}|} \leq \frac{1}{2}.$$

3. Напівциліндри та їх властивості

Розглянемо множину

$$\Delta_i^k = \{x : x = \widetilde{L}(a_1, \dots, a_{k-1}, i, a_{k+1}, \dots),\ a_j \in \mathbb{N}\},$$

чисел $(0,1]$, $\widetilde{L}$-зображення яких на k-тому місці містять символ i, тобто $a_k(x) = i$.

Лема 3. *Для довільних натуральних i та k має місце рівність*

$$\lambda\left(\Delta_i^k\right) = \frac{1}{i(i+1)}.$$

Доведення. З властивостей циліндричних множин та означення множини Δ_i^k випливає, що

$$\Delta_i^k = \bigcup_{a_1=1}^{\infty} \dots \bigcup_{a_{k-1}=1}^{\infty} \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1 \dots a_{k-1} i}.$$

Тоді

$$\lambda\left(\Delta_i^k\right) = \sum_{a_1=1}^{\infty} \dots \sum_{a_{k-1}=1}^{\infty} |\Delta^{\widetilde{L}}_{a_1 \dots a_{k-1} i}| = \frac{1}{i(i+1)} \left(\sum_{a_1=1}^{\infty} \dots \sum_{a_{k-1}=1}^{\infty} |\Delta^{\widetilde{L}}_{a_1 \dots a_{k-1}}| \right) =$$

$$= \frac{1}{i(i+1)} \cdot 1 = \frac{1}{i(i+1)}.$$

□

Наслідок 3. *Міра Лебега множини $\Delta_{\bar{i}}^k$ чисел $x \in (0,\ 1]$, які в $\widetilde{L}$-зображенні на k-му місці мають цифри, відмінні від цифри i, обчислюються за формулою*

$$\lambda\left(\Delta_{\bar{i}}^k\right) = 1 - \frac{1}{i(i+1)}.$$

Нехай маємо два набори натуральних чисел $(c_1, c_2, \dots, c_m)$, $(k_1, k_2, \dots, k_m)$, де $k_1 < k_2 < \dots < k_m$.

Лема 4. *Міра Лебега множини*

$$\Delta_{c_1 \dots c_m}^{k_1 \dots k_m} = \{x :\ a_{k_i}(x) = c_i,\ i = \overline{1, m}\}$$

чисел $(0,1]$, які на k_1 місці мають цифру c_1, а на k_2 місці мають цифру c_2 і т. д., на k_m місці — цифру c_m, обчислюється за формулою:

$$\lambda\left(\Delta_{c_1 \dots c_m}^{k_1 \dots k_m}\right) = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{c_i(c_i+1)}.$$

Доведення. Враховуючи означення множини $\Delta_{c_1 \dots c_m}^{k_1 \dots k_m}$ і властивість 1 циліндричних множин, маємо

$$\Delta_{c_1 \dots c_m}^{k_1 \dots k_m} = \bigcup_{a_1=1}^{\infty} \dots \bigcup_{a_{k_1-1}=1}^{\infty} \bigcup_{a_{k_1+1}=1}^{\infty} \dots \bigcup_{a_{k_m-1}=1}^{\infty} \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1 \dots a_{k_1-1} a_{k_1} a_{k_1+1} \dots a_{k_m-1} a_{k_m}}.$$

Тоді

$$\lambda(\Delta^{k_1\ldots k_m}_{c_1\ldots c_m}) = \sum_{a_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{a_{k_1-1}=1}^{\infty}\sum_{a_{k_1+1}=1}^{\infty}\cdots\sum_{a_{k_m-1}=1}^{\infty}\Delta^{\widetilde{L}}_{a_1\ldots a_{k_1-1}a_{k_1}a_{k_1+1}\ldots a_{k_m-1}a_{k_m}}.$$

Аналогічними міркуваннями доведення леми 3, отримуємо

$$\lambda\left(\Delta^{k_1\ldots k_m}_{c_1\ldots c_m}\right) = \frac{1}{c_m(c_m+1)}\cdot\frac{1}{c_{m-1}(c_{m-1}+1)}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{c_1(c_1+1)} = \prod_{i=1}^{m}\frac{1}{c_i(c_i+1)}.$$

□

Наслідок 4. *Напівциліндри $\widetilde{L}$-зображення є метрично незалежними, тобто*

$$\lambda\left(\Delta^{k_1\ldots k_n k_{n+1}\ldots k_m}_{c_1\ldots c_n c_{n+1}\ldots c_m}\right) = \lambda\left(\Delta^{k_1\ldots k_n}_{c_1\ldots c_n}\right)\cdot\lambda\left(\Delta^{k_{n+1}\ldots k_m}_{c_{n+1}\ldots c_m}\right) = \lambda\left(\Delta^{k_1}_{c_1}\right)\cdot\ldots\cdot\lambda\left(\Delta^{k_n}_{c_n}\right)\cdot\ldots\cdot\lambda\left(\Delta^{k_m}_{c_m}\right).$$

Наслідок 5. *Міра Лебега множини $\Delta^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$ дорівнює нулю.*

4. Множини з обмеженими $\widetilde{L}$-символами

Лема 5. *Якщо $\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_n}$ — фіксований циліндр, то для міри Лебега має місце рівність:*

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{m}\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_n i}\right) = \frac{m}{m+1}|\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_n}|.$$

Доведення. Оскільки

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{m}\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_n i}\right) = \sum_{i=1}^{m}|\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_n i}|,$$

то враховуючи лему 2, маємо:

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{m}\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_n i}\right) = \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i(i+1)}|\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_n}| =$$

$$|\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_n}|\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i(i+1)} = |\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_n}|\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right) =$$

$$= |\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_n}|\left(1-\frac{1}{m+1}\right) = \frac{m}{m+1}|\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_n}|,$$

що й вимагалось довести. □

Нехай $B(\widetilde{L})$ — множина всіх дійсних чисел з обмеженими $\widetilde{L}$-символами, тобто $x\in B(\widetilde{L})$, якщо існує число $K(x)$ таке, що $d_k(x)\leq K(x)$ для всіх $k\in N$.

Теорема 4. *Множина $B(\widetilde{L})$ дійсних чисел одиничного відрізка з обмеженими $\widetilde{L}$-символами має нульову міру Лебега.*

Доведення. Нехай $r \in N$. Позначимо через $B_r(\widetilde{L})$ множину всіх чисел $(0,1)$, $\widetilde{L}$-символи яких менші за r.

Якщо $\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\ldots c_m}$ — заданий циліндр рангу m, точки якого задовольняють умову

$$d_k(x) = a_i < r, \quad k = \overline{1,m},$$

то, враховуючи основне метричне відношення, справедлива наступна нерівність

$$\frac{1}{(i+1)^2} < \frac{|\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_m i}|}{|\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_m}|} < \frac{1}{i^2}.$$

Тоді

$$|\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\ldots c_m i}| > \frac{1}{(i+1)^2}|\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\ldots c_m}|,$$

$$\lambda\left(\bigcup_{i=r}^{\infty}\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\ldots c_m i}\right) = \sum_{i=r}^{\infty}|\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\ldots c_m i}| > |\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\ldots c_m}| \cdot \sum_{i=r}^{\infty}\frac{1}{(i+1)^2} >$$

$$> |\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\ldots c_m}| \cdot \int\limits_{r+1}^{\infty}\frac{1}{u^2}du = \frac{1}{r+1}|\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\ldots c_m}|.$$

Оскільки

$$\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\ldots c_m} = \left[\bigcup_{i=1}^{r-1}\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\ldots c_m i}\right] \bigcup \left[\bigcup_{i=r}^{\infty}\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\ldots c_m i}\right],$$

то

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{r-1}\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\ldots c_m i}\right) = |\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\ldots c_m}| - \lambda\left(\bigcup_{i=r}^{\infty}\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\ldots c_m i}\right) <$$

$$< |\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\ldots c_m}| - \frac{1}{r+1}|\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\ldots c_m}| = \frac{r}{r+1}|\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\ldots c_m}|.$$

Позначимо через $B^m_r(\widetilde{L})$ множину всіх чисел $(0,1)$, $\widetilde{L}$-символи яких задовольняють умову $d_k(x) = a_i < r, \quad k = \overline{1,m}$. Очевидно, що вона є об'єднанням r^m циліндрів рангу m. З нерівності $\lambda\left(\bigcup\limits_{i=1}^{r-1}\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\ldots c_m i}\right) < \frac{r}{r+1}|\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\ldots c_m}|$ слідує, що частина множини $B^{m+1}_r(\widetilde{L})$, яка міститься у циліндрі $\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_m}$ має міру Лебега, що є меншою за

$$\frac{r}{r+1}|\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_m}|.$$

Тому

$$\lambda\left(B^{m+1}_r(\widetilde{L})\right) < \frac{r}{r+1}\lambda\left(B^m_r(\widetilde{L})\right) < \frac{r}{r+1}\cdot\frac{r}{r+1}\lambda\left(B^{m-1}_r(\widetilde{L})\right) < \ldots <$$

$$< \lambda\left(B^1_r(\widetilde{L})\right)\left(\frac{r}{r+1}\right)^m.$$

Звідки $\lim\limits_{m\to\infty}\lambda\left(B^m_r(\widetilde{L})\right) = 0$. Оскільки $B_r(\widetilde{L}) \subset B^m_r(\widetilde{L})$ для довільного $m \in N$, то $\lambda\left(B_r(\widetilde{L})\right) = 0$.

Очевидно, що $B(\widetilde{L}) = \bigcup\limits_{r=1}^{\infty} B_r(\widetilde{L})$. Тому

$$\lambda(B(\widetilde{L})) \leq \sum_{r=1}^{\infty} \lambda(B_r(\widetilde{L})) = 0.$$

Отже, $\lambda(B(\widetilde{L})) = 0$, що й вимагалось довести.

$\square$

5. Множини канторівського типу

Нехай (V_n) — фіксована послідовність непорожніх підмножин множини $\mathbb{N}$ натуральних чисел. Розглянемо множину

$$C = C[\widetilde{L}, (V_n)] = \{x : \ x = \widetilde{L}(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots), a_n \in V_n, \forall n \in N\}.$$

Очевидно, що якщо $V_n = \mathbb{N}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то $C[\widetilde{L}, (V_n)] = [0, 1]$.

Позначимо через F_k замикання об'єднання всіх циліндричних множин рангу k, внутрішність яких містить точки множини $C[\widetilde{L}, (V_n)]$, $F_0 = [0, 1]$, а множину $\overline{F}_{k+1}$ означимо рівністю

$$\overline{F}_{k+1} = F_k \backslash F_{k+1}.$$

Тоді

$$F_k = \bigcup_{a_1 \in V_1} \bigcup_{a_2 \in V_2} \cdots \bigcup_{a_k \in V_k} \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1 \ldots a_k},$$

$$\overline{F}_{k+1} = \bigcup_{a_1 \in V_1} \bigcup_{a_2 \in V_2} \cdots \bigcup_{a_k \in V_k} \bigcup_{a_{k+1} \notin V_{k+1}} \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1 \ldots a_k a_{k+1}}.$$

Міра Лебега множин F_k і $\overline{F}_{k+1}$ визначається рівностями

$$\lambda(F_k) = \sum_{a_1 \in V_1} \sum_{a_2 \in V_2} \cdots \sum_{a_k \in V_k} |\Delta^{\widetilde{L}}_{a_1 \ldots a_k}|,$$

$$\lambda(\overline{F}_{k+1}) = \sum_{a_1 \in V_1} \sum_{a_2 \in V_2} \cdots \sum_{a_k \in V_k} \sum_{a_{k+1} \notin V_{k+1}} |\Delta^{\widetilde{L}}_{a_1 \ldots a_k a_{k+1}}|.$$

Оскільки $\overline{F}_{k+1} = F_k \backslash F_{k+1}$, то $\lambda(\overline{F}_{k+1}) = \lambda(F_k) - \lambda(F_{k+1})$.

$$\frac{\lambda(\overline{F}_{k+1})}{\lambda(F_k)} = 1 - \frac{\lambda(F_{k+1})}{\lambda(F_k)}.$$

З означення множин $C[\widetilde{L}, (V_n)]$, F_k і $\overline{F}_{k+1}$ і неперервності міри Лебега λ випливають наступні твердження:

$$\lambda(C[\widetilde{L}, (V_n)]) \leq \lambda(F_k) \neq 0 \, \forall k \in \mathbb{N},$$

$$\lambda(C[\widetilde{L}, (V_n)]) = \lim_{k \to \infty} \lambda(F_k),$$

$$\lambda(C[\widetilde{L}, (V_n)]) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\overline{F}_k).$$

Лема 6. *Міра Лебега множини $C[\widetilde{L},(V_n)]$ обчислюється за формулою*

$$\lambda(C[\widetilde{L},(V_n)]) = \prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})}\right].$$

Доведення. Враховуючи неперервність міри Лебега, маємо

$$\lambda(C[\widetilde{L},(V_n)]) = \lim_{k\to\infty}\lambda(F_k) = \lim_{k\to\infty}\frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})}\cdot\frac{\lambda(F_{k-1})}{\lambda(F\lambda_{k-2})}\cdot\ldots\cdot\frac{\lambda(F_2)}{\lambda(F_1)}\cdot\frac{\lambda(F_1)}{\lambda(F_0)} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\prod_{i=1}^{k}\frac{\lambda(F_i)}{\lambda(F_{i-1})} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})} = \prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})}\right].$$

□

Наслідок 6. *Множина $C[\widetilde{L},(V_n)]$ має нульову міру Лебега тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} = \infty.$$

Наслідок 7. *Якщо $V_n = V \neq \mathbb{N}$ для довільного $n\in\mathbb{N}$, то*

$$\lambda(C[\widetilde{L},(V_n)]) = 0.$$

Лема 7. *Якщо $V_n = \{n+1,\ n+2,\ldots,n+s,\ldots\}$ для будь-якого $n\in\mathbb{N}$, то*

$$\lambda(C[\widetilde{L},(V_n)]) = 0.$$

Доведення.

$$\frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} = \sum_{i=1}^{k}\frac{|\Delta^{\widetilde{L}}_{a_1a_1\ldots a_{k-1}i}|}{|\Delta^{\widetilde{L}}_{a_1a_1\ldots a_{k-1}}|} = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i(i+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k+1}.$$

За ознакою Даламбера останній ряд розбіжний. Отже, за наслідком 6

$$\lambda(C[\widetilde{L},(V_n)]) = 0.$$

□

Лема 8. *Якщо $V_n = \{1,\ 2,\ldots,n\}$ для будь-якого $n\in\mathbb{N}$, то*

$$\lambda(C[\widetilde{L},(V_n)]) = 0.$$

Доведення.

$$\frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} = 1-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i(i+1)} = 1-\frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+1}.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}.$$

За ознакою Даламбера останній ряд розбіжний. Отже, за наслідком 6

$$\lambda(C[\widetilde{L},(V_n)]) = 0.$$

□

Лема 9. *Якщо* $V_n = \{1,\ 2,\dots,m_n\}$ *для будь-якого* $n\in\mathbb{N}$ *і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{m_n}$ *розбігається, то міра Лебега множини* $C[\widetilde{L},(V_n)]$ *дорівнює 0.*

Доведення.

$$\frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} = 1-\sum_{i=1}^{m_k}\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{m_k+1}.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{m_k+1}.$$

Тому твердження теореми виплива́є з наслідку 6, оскільки ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{m_k+1} \quad \text{та} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{m_k}$$

є збіжними чи розбіжними одночасно.

□

6. Випадкові знакозмінні ряди Люрота з незалежними елементами

Нехай (η_k) — послідовність незалежних випадкових величин, причому η_k набуває значень $1,2,\dots,i,\dots$ з ймовірностями $p_{1k},p_{2k},\dots,p_{ik},\dots$ відповідно,

$$p_{ik}\geq 0,\ p_{1k}+p_{2k}+\ldots=1 \ \ \forall k\in N.$$

Розглядається випадкова величина

$$\xi = \Delta^{\widetilde{L}}_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_k\ldots}. \tag{1}$$

Теорема 5. *Випадкова величина* ξ *з незалежними* $\widetilde{L}$*-символами має дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли*

$$\prod_{k=1}^{\infty}\max_m p_{mk} > 0. \tag{2}$$

Причому у випадку дискретності множина атомів розподілу випадкової величини ξ *складається з точки* x_0*, де* $p_{a_k(x_0)k}=\max\limits_m\{p_{mk}\}$ $\forall k\in\mathbb{N}$*, і всіх точок* $x'\in(0,1)$*, у яких* $p_{a_k(x')k}>0$ *та існує таке* $m\in N$*, що* $a_j(x')=a_j(x_0)$ *при* $j\geq m$*.*

Доведення. Число x є атомом розподілу випадкової величини ξ, якщо

$$\prod_{k=1}^{\infty}p_{a_k(x)k} > 0.$$

Необхідність. Нехай випадкова величина ξ має дискретний розподіл і x – один із атомів розподілу. Припустимо, що нескінченний добуток в (2) розбігається до 0. Тоді

$$P\{\xi=x\} = \prod_{k=1}^{\infty}p_{a_k(x)k} \leq \prod_{k=1}^{\infty}\max_m p_{mk} = 0,$$

але це суперечить тому, що x – атом розподілу. Тому припущення неправильне, що й доводить необхідність.

Достатність. Нехай виконується (2). Тоді, очевидно, що x_0 і всі x', які відрізняються від нього лише скінченною кількістю $\widetilde{L}$-символів, для яких $p_{a_k(x')k} > 0$, є атомами розподілу ξ. Покажемо, що ξ має дискретний розподіл.

Нехай D_m – множина всіх точок x', $\widetilde{L}$-символи яких співпадають з $\widetilde{L}$-символами точки x_0, починаючи з m. Тоді

$$P\{\xi \in D_m\} = \sum_{a_1(x')} \dots \sum_{a_{m-1}(x')} \left(\prod_{k=1}^{m-1} p_{a_k(x')k} \cdot \prod_{k=m}^{\infty} p_{a_k(x_0)k} \right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{m-1} \sum_{a_k(x')} p_{a_k(x')k} \cdot \prod_{k=m}^{\infty} p_{a_k(x_0)k} = \prod_{k=m}^{\infty} p_{a_k(x_0)k}.$$

Множина $D = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m$ – не більш ніж зчисленна, оскільки вона є зчисленним об'єднанням не більш ніж зчисленних множин. Оскільки

$$\{x_0\} = D_1 \subset D_2 \subset ... \subset D_m \subset D_{m+1} \subset ...,$$

то за властивістю неперервності ймовірності

$$P\{\xi \in D\} = \lim_{m\to\infty} P\{\xi \in D_m\} = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=m}^{\infty} p_{a_k(x_0)k} = 1,$$

остання границя дорівнює 1 за властивостями збіжних нескінченних добутків.

Отже, злічена множина D є носієм розподілу випадкової величини ξ, тобто розподіл є дискретним. □

Наслідок 8. *Випадкова величина ξ має неперервний розподіл тоді і тільки тоді, коли нескінченний добуток в (2) дорівнює 0.*

Лема 10. *Спектр S_ξ розподілу випадкової величини ξ (тобто його мінімальний замкнений носій, теж саме – множина точок росту функції розподілу) є замиканням множини*

$$B_\xi = \{x : x = \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1a_2...a_n...},\ \text{де}\ p_{a_n(x)n} > 0\ \forall n \in N\} = C[\widetilde{L}, (V_n)].$$

Доведення. Взагалі кажучи, множина B_ξ не є замкненою, тому для доведення леми досить показати, що $B_\xi \subset S_\xi$ і кожна внутрішня точка множини $[0, 1]\backslash B_\xi$ не належить S_ξ.

Покажемо, що точка x', для якої мають місце співвідношення $p_{a_j(x')j} > 0$ для будь-якого $j \in N$ належить спектру S_ξ.

Згідно з означенням, x' є точкою росту функції розподілу F_ξ, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується нерівність

$$F_\xi(x' + \varepsilon) - F_\xi(x' - \varepsilon) > 0.$$

Оскільки для довільного $\varepsilon > 0$ легко вказати циліндр $\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2...c_m}$, який містить x', $(p_{c_ii} > 0)$ повністю належить інтервалу $(x' - \varepsilon,\ x' + \varepsilon)$, то для приростів виконуються нерівності

$$F_\xi(x'+\varepsilon)-F_\xi(x'-\varepsilon)\equiv\delta\left((x'-\varepsilon,\,x'+\varepsilon)\right)\geq\delta(\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_m})=\prod_{i=1}^{m}p_{c_ii}>0.$$

Якщо точка $x'\in[0,\,1]\backslash B_\xi$ не є кінцем жодного з циліндрів і існує $p_{a_j(x')j}=0$, то x' належить інтервалу сталості функції, яким є $\nabla_{c_1c_2\ldots c_m}\equiv int\Delta_{c_1c_2\ldots c_m}$. Розглянувши $\varepsilon>0$ таким, що $(x'-\varepsilon,\,x'+\varepsilon)\subset\nabla_{c_1c_2\ldots c_m}$, матимемо

$$F_\xi(x'+\varepsilon)-F_\xi(x'-\varepsilon)\leq\delta(\Delta^{L}_{c_1c_2\ldots c_m})=0.$$

Отже, $x'\notin S_\xi$. □

Теорема 6. *Випадкова величина ξ має розподіл канторівського типу тоді і тільки тоді, коли*

$$\prod_{k=1}^{\infty}\sum_{i:p_{ik}>0}\frac{1}{i(i+1)}=0.$$

Доведення. Розподіл випадкової величини належить до канторівського типу, якщо його спектр є множиною нульової міри Лебега. Тому дана теорема є наслідком леми (10) і леми (6). □

Література

[1] Albeverio S., Baranovskyi O., Pratsiovytyi M., Torbin G. The set of incomplete sums of the first Ostrogradsky series and probability distributions on it. // Rev. Roum. Math. Pures Appl. — 2009. — **54**, no. 2. — P. 85-115.

[2] *Barrionuevo J., Burton R., Dajani K., Kraaikamp C.* Ergodic properties of generalized Lüroth series // Acta Arithmetica (1996) – №4 – P. 311–327.

[3] *Cantor G.* Uber die einfachen Zahlensysteme // Z. Math. Phys. — 1869. — Bd. 14. — S. 121–128.

[4] Dajani K., Kraaikamp C. On approximation by Luroth series. // J.Theor. Nomberes Bordeaux — 1996. —**8**.— P. 331-346

[5] *Galambos J.* Some remarks on the Lüroth expansion. // Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 22 (1972) – № 2 – P. 266–271.

[6] *Ganatsiou C.* On some Properties of the Lüroth-tipe alternating series representations for real numbers // Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences (2001) – P. 367–373.

[7] *Kalpazidou S., Knopfmacher A., Knopfmacher J.* Lüroth-type alternating series representations for real numbers // Acta Arith. — 1990. — Vol. 55. — P. 311–322.

[8] *Kalpazidou S., Knopfmacher A., Knopfmacher J.* Metric properties of alternating Lüroth series // Portugal. Math. — 1991. — Vol. 48. — P. 319–325.

[9] *Lüroth J.* Ueber eine eindeutige Entwickelung von Zahlen in eine unendliche Reihe // Math. Ann. — 1883. — Vol. 21. — P. 411-423.

[10] *Sierpinski W.* O kilku algorytmach dla rozwijania liczb rzeczywistych na szeregi. Spravozdania z posiedsen Towarsystvwa Naukowego Warszawskiego, Wydzial III 4 (1911).– P.56–77. (є франц. переклад: Sur quelques algorithms pour developer les nombres reeis en serie // Oeuvres choisies, T.1,PWN Warchawa, 1974 – P. 236–254.)

[11] *Sylvester J.J.* On a point in the theory of vulgar fractions// Amer. Journal of Math. – (3)1880. – P.332-335., postscript ibid. 388-389.

[12] *Барановський О.М., Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Тополого-метричні властивості множин дійсних чисел з умовами на їх розклади в ряди Остроградського // Укр. Мат. журн. – 2007. – 59, №9. – С. 1155–1168.

[13] *Працьовита І. М.* Ряди Остроградського 2-го виду і розподіли їх випадкових неповних сум // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М.П.Драгоманова. — 2006. — № 7. — С. 174–189.

[14] *Працьовита І. М.* Про розклади чисел в знакозмінні s-адичні ряди і ряди Остроградського 1-го та 2-го виду // Укр. Мат. журн., 2009. — 61. № 7. — С. 958–968.

[15] *Працьовитий М. В., Гетьман Б. І.* Ряди Енгеля та їх застосування // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М.П.Драгоманова. — 2006. — № 7. — С. 105–116.

[16] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[17] Працьовитий М.В., Хворостіна Ю.В. *Множина неповних сум знакозмінного ряду Люрота та розподіли ймовірностей на ній.* Наук. час. НПУ ім. М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки. — К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2009. — №10.—С.14–28

[18] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наукова думка, 1992. — 208 с.