

As a result of the analysis of psychological sources, the structure of activity is determined. We consider mental actions as meaningful structural elements of mental activity to which the computing activity belongs, and the quality of mental action formation depends on the quality of orienteering activity based on orienteering action.

The functional parts of computing activity are singled out: orienteering, executive and control-correctional. The orienteering part is central and lies in the particular case of correlation between calculations known to pupil and computational techniques and ways of reasoning, ascertaining their possible application in this particular case, the approval of one of them, and actualization of the orienteering bases of action. The executive part of the computing activity involves the implementation of one of the computational techniques or ways of reasoning, and the control-correction part, further evaluating the rationality of the chosen path and the possible use of another technique or way of reasoning.

It has been established that fast and correct calculations are related to the ability of the pupil to actualize the required computation, which is more effective than other techniques as it leads to the result and the ability to quickly and unmistakably implement the operations that make up this technique.

Since the need for computing occurs to a person at all times, then the motives of computing activity arise on the basis of practical needs, the satisfaction of which implements its purpose – to find the result of the arithmetical actions of addition, subtraction, multiplication and division (complete or with the remainder) in the set of integer non-negative numbers. In the future, we see the need to investigate the problem of computing.

Key words: activity, mental activity, computing activity, functional part of activity, orienteering part, executive part, control-correction part.

УДК 511:378.147

DOI 10.5281/zenodo.2110098

І. А. Сверчевська

ORCID ID 0000-0001-7306-3836

Житомирський державний університет
імені Івана Франка

ВАРІАТИВНІСТЬ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ В ІСТОРИЧНИХ ЗАДАЧАХ

У статті досліджується роль визначних історичних задач у формуванні знань про методи їх розв'язування. Виокремлюються задачі, які приводять до систем лінійних рівнянь. Аналізуються авторські методи розв'язування систем математиками різних періодів історії розвитку математики та доповнюються сучасними методами. Це є продовженням наших досліджень різних методів розв'язування історичних задач з алгебри і теорії чисел, історико-генетичного підходу у фаховій підготовці майбутніх вчителів математики. Запропоновано систему історичних задач, де виділено два аспекти. А саме, варіативність методів у різних авторських задачах та у другому випадку – розв'язування однієї і тієї ж задачі різними способами. Творчі нетрадиційні підходи до розв'язування систем лінійних рівнянь проаналізовано у задачах індійського математика Аріабхати з трактату «Аріабхатіам», німецького математика Неморарія з II книги трактату «Про дані числа», італійського математика Бенедиктуса з твору «Книга про різні математичні та фізичні роздуми», шотландського математика Маклорена з твору «Трактат з алгебри». Варіативність методів розв'язування однієї і тієї ж задачі розглянуто в задачах арабського математика Альгазена, індійського математика Бхаскари II з трактату «Вінок систем», італійського математика Леонардо Пізанського з XI розділу «Книги абака», арабського математика Бега-Еддіна з твору «Есенція мистецтв числення». Зроблено висновок, що такий підхід дає можливість створити банк методів розв'язування

систем лінійних рівнянь і застосувати творчий підхід до розв'язування математичних задач, крім того, використати виховні та розвивальні можливості історії математики. Навчання методів розв'язування систем лінійних рівнянь передбачено програмою з «Лінійної алгебри» педагогічних спеціальностей університетів (методи послідовного виключення невідомих, детермінантів і матричний метод) та навчальною програмою з математики для загальноосвітніх навчальних закладів (методи алгебраїчного додавання, підстановки, заміни змінних і геометричний метод), тому важливим є подальше дослідження варіативності методів розв'язування історичних задач для реалізації завдань математичної освіти.

Ключові слова: математичні задачі, методи розв'язування, системи лінійних рівнянь, історичні задачі, авторські методи, сучасні методи, банк методів, творчі вміння, система історичних задач.

Постановка проблеми. У Законі України «Про освіту» зазначається, що метою вищої освіти є здобуття особою високого рівня наукових, професійних і загальних компетентностей. При навчанні математики важливим навчальним ресурсом для виконання поставленого завдання є розв'язування математичних задач. Ми виокремлюємо визначні історичні задачі, які приводять до систем лінійних рівнянь, і розглядаємо авторські та сучасні методи їх розв'язування. При чому розглядаємо два аспекти: нестандартні методи розв'язування різних історичних задач і розв'язування однієї і тієї ж задачі різними способами. У першому випадку створюється банк методів розв'язування лінійних систем, куди входять традиційні та нестандартні методи, що дає можливість оволодіти багатством методів. У другому випадку, розв'язуючи одну задачу різними методами, можна зрозуміти їх переваги і недоліки. При цьому відбувається не тільки повторення теоретичного матеріалу, а й розвиваються дослідницькі та творчі вміння.

Розв'язування історичних задач дозволить перекоонатися у варіативності методів розв'язування систем лінійних рівнянь і буде здійснюватися ефективніше за умови використання різних методів розв'язування до кожної з окремо взятих задач.

Аналіз актуальних досліджень. Математичні задачі грають важливу роль при навчанні математики. У процесі розв'язування задач виробляється досвід практичного застосування теоретичних математичних знань, розвивається логічне, творче і критичне мислення, виховується наполегливість.

Проблемам пошуку методів розв'язування задач замалися математики Д. Пойа, Ю. М. Калягін, В. Г. Болтянський, Л. М. Фридман та ін.

Вдосконаленню методики розв'язування задач присвячені роботи математиків-методистів. Так, Г. П. Бевз рекомендує не відокремлювати вивчення теорії від розв'язування задач і пропонує йти від задач до теорії та потім від теорії до задач. Зауважує, що важливо розв'язувати одну задачу кількома способами та вказати найраціональніший. Формулює загальні рекомендації щодо розв'язування задач. З. І. Слєпкань виокремлює основні етапи навчання розв'язуванню задач методом складання рівняння за умовою задачі: підготовчий; аналіз формулювання задачі; виділення величин, значення яких можна прирівняти; позначення невідомого і складання виразів, які будуть прирівнюватися; розв'язування та перевірка. Ці рекомендації можна застосовувати і при розв'язуванні задач, які приводять до системи рівнянь. Робиться висновок, що спосіб розв'язування задачі виступає і як мета, і як прямий результат навчання. Н. О. Вірченко рекомендує на практичних заняттях з вищої математики розв'язувати різні типи задач: при запровадженні нових понять; ілюстративного характеру; для глибшого розуміння теоретичного факту; для вироблення навичок розв'язування задач; для контролю рівня знань, вмінь, для самоконтролю; для підтримки інтересу студентів до математики.

Роль задач у навчанні математики досліджують науковці вищих навчальних закладів. Так, Т. Л. Трайчев обґрунтовує необхідність навчання методам розв'язування задач і розвитку вмінь їх застосовувати. Він виокремлює необхідні умови формування цих умінь, серед яких формування знань про методи розв'язування задач, використання різних

методів при розв'язуванні однієї і тієї ж задачі. Розв'язування задач різними способами досліджують А. С. Васюк, М. В. Проценко (для активізації пізнавальної діяльності учнів), Н. Д. Борисенко (для посилення розвивальної функції задач).

Н. А. Тарасенкова розглядає задачі як засіб компетентісного навчання математики, вони є вимірниками і засобами формування різних рівнів предметної математичної компетентності (М-задачі – традиційні математичні завдання; К-О-задачі – компетентісно орієнтовані; К-задачі – спеціальні компетентнісні завдання).

О. С. Чашечникова досліджує підходи до створення математичних моделей прикладних задач на прикладі змістової лінії «Рівняння, нерівності та їх системи», що вивчається в основній школі. Це дасть можливість майбутнім вчителям створювати творче середовище у процесі навчання математики [7, с. 50].

Досліджуючи роль задач у навчанні математики, В. Г. Бевз виділяє визначні історичні задачі, які найкраще застосовувати з метою навчання, виховання та розвитку учнів. До історичних задач пропонується віднести задачі з історичних пам'яток, з давніх підручників, трактатів, задачі, створені відомими математиками. Розроблено методику впровадження історичних задач у курсі елементарної та вищої математики, методики навчання математики [1, с. 93, с. 133].

Проблему використання історичних задач у навчанні математики досліджували Г. Н. Попов, І. Я. Депман, В. Д. Чистяков, Г. І. Глейзер, А. Г. Конфорович, С. Н. Олехник, І. І. Баврин, Є. О. Фрибус.

Історичні задачі є предметом дослідження А. О. Розуменко, А. М. Розуменко (для розвитку пізнавальної мотивації та критичного мислення студентів); Р. С. Бачинської (як засіб активізації та підвищення інтересу учнів до навчання математики); А. В. Олейнікової (для формування загальнокультурної компетентності учнів).

Нами досліджено різні методи розв'язування арифметичних історичних задач, алгебраїчних рівнянь [6, с. 43]; нелінійних систем алгебраїчних рівнянь [3, с. 51]. Застосування історичних задач при навчанні методів розв'язування систем лінійних рівнянь, передбачених програмою з «Лінійної алгебри» [5, с. 37].

Мета статті. Дослідження авторських методів розв'язування систем лінійних рівнянь в історичних задачах та застосування нових методів, зважаючи на сучасний стан розвитку математичної науки.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо задачі, де запропоновано творчі підходи авторів до розв'язування систем лінійних рівнянь. Ці методи цікаві, індивідуальні та нетрадиційні.

Задача Аріабхати з трактату «Аріабхатіам» (V ст.)

Аріабхата I (475 – бл. 558) – індійський астроном і математик. Його трактат «Аріабхатіам», написаний у 499 р., складається з чотирьох частин: I – «Небесна гармонія». II – «Початки числення». III – «Про час і його вимірювання». IV – «Кулі». Другу частину перекладено французьким вченим Роде, який написав до неї коментарі у 1979 р. У 33-х строфах наведено правила розв'язування окремих задач арифметики, геометрії, тригонометрії, які коментувалися і розвивалися майже до XVI ст.

Розв'язати систему рівнянь [2, с. 399].

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ y + z + u = b \\ x + z + u = c \\ x + y + u = d \end{cases}.$$

Розв'язання. Додамо всі рівняння $3x + 3y + 3z + 3u = a + b + c + d$, звідки

$$x + y + z + u = \frac{a + b + c + d}{3}. \text{ Оскільки з першого рівняння } x + y + z = a, \text{ то } a + u = \frac{a + b + c + d}{3},$$

$$u = \frac{a + b + c + d}{3} - a.$$

Використовуючи послідовно кожне з рівнянь, знайдемо всі розв'язки.

$$\begin{cases} x + y + z + u = \frac{a+b+c+d}{3}, & x = \frac{a+b+c+d}{3} - b. \\ y + z + u = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z + u = \frac{a+b+c+d}{3}, & y = \frac{a+b+c+d}{3} - c. \\ x + z + u = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z + u = \frac{a+b+c+d}{3}, & z = \frac{a+b+c+d}{3} - d. \\ x + y + u = d \end{cases}$$

Для трьох змінних подібну систему розв'язав іншим методом італійський математик і філософ Бенедиктус (XVI ст.)

Задача № 25 з II книги трактату Неморарія «Про дані числа».

Йордан Неморарій – німецький математик. Помер у 1237 р. Він послідовніше, ніж його попередники використовував букви для позначення шуканих і даних чисел, але ще не використовував знаки дій. Твір «Про дані числа» (4 книги) – це універсальний курс абстрактної алгебри XIII ст., де приклади спочатку розв'язуються у загальному вигляді, а потім роз'яснюються на числових прикладах.

Розв'язати систему рівнянь [8, с. 382]

$$\begin{cases} x + \frac{y}{2} = 119 \\ y + \frac{z}{3} = 119 \\ z + \frac{u}{4} = 119 \\ u + \frac{x}{5} = 119 \end{cases}$$

Автор розглядає перше і друге рівняння.

$$\begin{cases} x + \frac{y}{2} = 119 \\ y + \frac{z}{3} = 119 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{y}{2} = 119 \\ \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = \frac{119}{2} \end{cases}, \quad x - \frac{z}{6} = \frac{119}{2}, \quad x = \frac{z}{6} + 59\frac{1}{2}.$$

Розглядає одержане рівняння і третє рівняння.

$$\begin{cases} x - \frac{z}{6} = \frac{119}{2} \\ z + \frac{u}{4} = 119 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{z}{6} = \frac{119}{2} \\ \frac{z}{6} + \frac{u}{24} = \frac{119}{6} \end{cases}, \quad x + \frac{u}{24} = \frac{238}{3}, \quad x = 79\frac{1}{3} - \frac{u}{24}.$$

Розглядає одержане рівняння і четверте.

$$\begin{cases} x + \frac{u}{24} = \frac{238}{3} \\ u + \frac{x}{5} = 119 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + \frac{u}{24} = \frac{238}{3} \\ \frac{u}{24} + \frac{x}{120} = \frac{119}{24} \end{cases}, \quad x - \frac{x}{120} = \frac{238}{3} - \frac{119}{24},$$

$$\frac{119}{120}x = \frac{16 \cdot 119 - 119}{24} = \frac{15 \cdot 119}{24}, \quad \frac{119}{120}x = \frac{5 \cdot 119}{8}, \quad x = \frac{5 \cdot 120}{8} = 5 \cdot 15 = 75.$$

$$\text{З першого рівняння } x + \frac{y}{2} = 119, \quad \frac{y}{2} = 119 - x = 44, \quad y = 88.$$

$$\text{З другого рівняння } y + \frac{z}{3} = 119, \quad \frac{z}{3} = 119 - y = 31, \quad z = 93.$$

$$\text{З третього рівняння } z + \frac{u}{4} = 119, \frac{u}{4} = 119 - z = 26, u = 104.$$

Відповідь: $x = 75, y = 88, z = 93, u = 104$.

Задача Бенедиктуса

Беннедетті або Бенедиктус Джиамбатиста (1530 – 1590) – італійський математик і філософ, учень Тартальї. У творі «Книга про різні математичні та фізичні роздуми» ілюструє алгебраїчні висновки геометрично.

Розв'язати систему [4, с. 46]

$$\begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ z + x = c \end{cases} \text{ Приймаючи } a, b, c \text{ за сторони трикутника, дати інтерпретацію розв'язків}$$

цієї системи геометрично.

Додамо перші два рівняння $x + 2y + z = a + b$, врахуємо третє рівняння $z + x = c$, отримаємо $c + 2y = a + b$, звідки $y = \frac{a + b - c}{2}$.

Додамо перше і третє рівняння $2x + y + z = a + c$, врахуємо друге рівняння $y + z = b$, отримаємо $2x + b = a + c$, звідки $x = \frac{a + c - b}{2}$.

Додамо друге і третє рівняння $x + y + 2z = b + c$, врахуємо перше рівняння $x + y = a$, отримаємо $a + 2z = b + c$, звідки $z = \frac{b + c - a}{2}$.

Бенедиктус дає геометричну інтерпретацію: візьмемо трикутник зі сторонами a, b, c . Якщо вписати у трикутник коло, то в точках дотику сторони розіб'ються на відрізки так, що $x + y = a, y + z = b, z + x = c$. тобто маємо виведення формул, що виражають відрізки x, y, z через сторони трикутника алгебраїчним методом.

Задача Маклорена з «Трактату з алгебри»

Маклорен (1698 – 1746) – шотландський математик, учень І. Ньютона, здобув славу працями з аналізу. З дитинства виявив велике математичне обдарування. У 12 років вступив до університету, а в 20 років отримав кафедру математики в Абердині.

$$\text{Розв'язати систему } \begin{cases} x + y + z = 26 \\ x - y = 4 \\ x - z = 6 \end{cases} \text{ [4, с. 51].}$$

Маклорен додає всі три рівняння й одержує $3x = 36, x = 12$. Тоді з другого рівняння $y = 8$. А з третього рівняння $z = 6$.

Дослідивши різні методи розв'язування систем лінійних рівнянь у різних визначних історичних задачах, звернемо увагу на варіативність методів розв'язування однієї і тієї ж задачі.

Задача Альгазена

Ібн-ал-Хайсам (Альгазен) (965 – 1039) – арабський математик, астроном, фізик, лікар.

Знайти число, що ділиться на 7 і при діленні на 2, 3, 4, 5, 6 дає в остачі 1 [8, с. 247].

Цю задачу знову розглядав у свій час Леонардо Пізанський.

Розв'язання.

1-й спосіб.

Розглянемо число $N, (N - 1) : 2, 3, 4, 5, 6; [2, 3, 4, 5, 6] = [2, 5, 6] = 60; N - 1$ приймає значення 60, 120, 180, 240, 300, 360, ... N приймає значення 61, 121, 181, 241, 301, 361, ... Потрібно вибрати такі, що діляться на 7. Найменше 301.

2-й спосіб. Метод Гауса. Зведемо до системи рівнянь.

$$\begin{cases} N = 2x + 1 \\ N = 3y + 1 \\ N = 4z + 1; \\ N = 5u + 1 \\ N = 6v + 1 \\ N = 7k \end{cases} \begin{cases} 2x + 1 = 3y + 1 \\ 2x + 1 = 4z + 1 \\ 2x + 1 = 5u + 1; \\ 2x + 1 = 6v + 1 \\ 2x + 1 = 7k \end{cases} \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 3y - 4z = 0 \\ 3y - 5u = 0; \\ 3y - 6v = 0 \\ 3y - 7k = -1 \end{cases} \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 3y - 4z = 0 \\ 4z - 5u = 0; \\ 4z - 6v = 0 \\ 4z - 7k = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 3y - 4z = 0 \\ 4z - 5u = 0; \\ 5u - 6v = 0 \\ 5u - 7k = -1 \end{cases} \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 3y - 4z = 0 \\ 4z - 5u = 0; \\ 5u - 6v = 0 \\ 6v - 7k = -1 \end{cases} \quad x = \frac{7k-1}{2};$$

$$y = \frac{7k-1}{3}; z = \frac{7k-1}{4}; u = \frac{7k-1}{5}; v = \frac{7k-1}{6}; k \in \mathbb{Z}.$$

Шукаємо найменший цілий розв'язок. $(7k-1)$ ділиться на 2; 3; 4; 5; 6. Найменше спільне кратне цих чисел 60, то $(7k-1)$ ділиться на число кратне 60. $(7k-1)$ приймає значення: 60; 120; 180; 240; 300; 360; ...

$7k$ приймає значення: 61; 121; 181; 241; 301; 361; ... $301:7 \Rightarrow 7k = 301$, де $k = 43$; $7k - 1 = 300$, $x = \frac{300}{2} = 150$; $y = \frac{300}{3} = 100$; $z = \frac{300}{4} = 75$; $u = \frac{300}{5} = 60$; $v = \frac{300}{6} = 50$.
 $N = 7k = 301$ – найменше ціле число. Загальний розв'язок $N = 301 + 420t$, де t – ціле додатне число.

3-й спосіб. Можна розв'язати задачу за допомогою порівнянь.

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 1 \pmod{4} \\ x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{6} \\ x \equiv 0 \pmod{7} \end{cases}, \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{60} \\ x \equiv 0 \pmod{7} \end{cases}, x = 301 + 420t. \text{ Найменше число } 301.$$

Задача Бхаскари II з трактату «Вінок системи»

Бхаскара-акарія (акарія – мудрець, вчений) (1114 – 1178) – визначний індійський математик. Його трактат «Вінок системи» (бл. 1150). У двох перших частинах «Лілаваті» («Красуня») і «Біджа-ганіта» («Обчислення коренів») викладено методи розв'язування алгебраїчних задач. У кінці трактату Бхаскара вказує на ціль свого твору: «Іскра науки, осмислена розумом, розгортається завдяки своїй власній силі». Коментуванням цієї книги майже чотири століття займалися видатні математики. А його внук на початку III ст. заснував спеціальну школу для вивчення цієї книги.

Дехто сказав своєму другу: «Дай мені 100 рупій, і я стану вдвічі багатшим за тебе». Другий відповів: «Дай мені лише 10 рупій, і я стану в шість разів багатшим за тебе». Скільки грошей було у кожного?» [8, с. 137]

Авторський метод. Бхаскара використовує прийом Діофанта, покладає, що перший має $2x - 100$, а другий $x + 100$. Це задовольняє першій умові задачі. У першого $(2x - 100) + 100 = 2x$, у другого $(x + 100) - 100 = x$. Потім покладає $6((2x - 100) - 10) = (x + 100) + 10$ та розв'язує $6(2x - 110) = x + 110$, $12x - 660 = x + 110$, $11x = 770$, $x = 70$. Тоді у першого $2x - 100 = 2 \cdot 70 - 100 = 40$, у другого $x + 100 = 70 + 100 = 170$.

2-й спосіб. Нехай у першого x рупій, у другого y рупій, складаємо систему рівнянь.

$$\begin{cases} x + 100 = 2(y - 100) \\ y + 10 = 6(x - 10) \end{cases}; \begin{cases} x - 2y = -300 \\ 6x - y = 70 \end{cases}; \begin{cases} x - 2y = -300 \\ 11y = 1870 \end{cases}, \begin{cases} x = -300 + 2y = 40 \\ y = 170 \end{cases}.$$

Відповідь: у першого 40 рупій, у другого – 170.

Задача Леонардо Пізанського з «Книги абака», розділ XI

Леонардо Пізанський (Фібоначчі) – італійський математик. Леонардо видав дві книжки: з арифметики і алгебри «Liber abaci» («Книга про абак, 1202»), де абак уже розглядався не стільки як прилад, скільки як числення взагалі, і з геометрії «Practica geometriae» («Практична геометрія», 1202). За першою книжкою навчалося багато поколінь європейських математиків, які, зокрема, вивчали за нею індійську позиційну систему числення. Леонардо поклав початок розробці питань, пов'язаних з числами Фібоначчі, дав оригінальний прийом добування кубічного кореня

Дехто купив 30 птахів по 30 монет. За три горобці він заплатив 1 монету, за дві горлиці – теж 1 монету, за кожного голуба – 2 монети. Скільки птахів кожного виду він купив? [2, с. 204]

Задача зводиться до розв'язування невизначеної системи рівнянь
$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 2z = 30 \end{cases},$$

де x, y, z – кількість горобців, горлиць, голубів відповідно.

I спосіб. Виключаючи z , приходимо до діофантового рівняння $10x + 9y = 180$, $y = 20 - \frac{10}{9}x$, $x = 9$, $y = 10$, $z = 11$.

II спосіб. Розв'яжемо систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 2z = 30 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y + z = 30 \\ y + 10z = 120 \end{cases}, \quad y = 120 - 10z, \quad x = -90 + 9z. \quad \text{Оскільки}$$

$0 \leq x \leq 30$, $0 \leq y \leq 30$, $0 \leq z \leq 30$, то $z = 11$, $y = 10$, $x = 9$ або $z = 12$, $y = 0$, $x = 18$. Другий розв'язок Леонардо не розглядає.

Задача Бега-Еддіна

Бега-Еддін (Бехаеддін) (1547 – 1622) – арабський математик. З його творів до нас дійшов один «Ессенція мистецтв числення» («Хуласат ал-хісаб»). Це збірник правил для учнів з арифметики, алгебри, геометрії. Він був навчальним посібником в школах Індії, Ірану і Турції. Трактат було переведено на німецьку мову (1843), французьку (1864). У розділі X зібрано задачі. За словами Бега-Еддіна: «Задачі ці загострюють розум учня та посилюють його при відшукуванні невідомих». Кожна із задач розв'язана кількома методами.

Розділіть 10 на дві частини, різниця яких є 5 [2, с. 672].

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 5 \end{cases}.$$

Розв'язання автора.

I спосіб. За допомогою алгебри. Поклади меншу частину x , то більша буде $x + 5$, а сума їх буде $2x + 5 = 10$, одержуємо $x = 2\frac{1}{2}$.

II спосіб. За допомогою хибного припущення. Покладемо меншу частину 3, то відступ (надлишок) буде 1; потім покладемо 4, то другий відступ буде 3. Різниця результатів 5, а відступів 2.

Реконструкція розв'язання. $x_1 = 3$, $d_1 = 1$, $x_2 = 4$, $d_2 = 3$.

За методом хибного припущення. $ax = b$, $x = x_1$, $ax_1 = b + d_1$, $x = x_2$, $ax_2 = b + d_2$, d_1, d_2 – похибки.

$$\frac{ax = b}{ax_1 = b + d_1}, \quad \frac{ax = b}{ax_2 = b + d_2}, \quad \frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{d_1}{d_2}, \quad x = \frac{x_1 d_2 - x_2 d_1}{d_2 - d_1}.$$

$$x = \frac{3 \cdot 3 - 4 \cdot 1}{3 - 1} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}.$$

III спосіб. За допомогою обернених дій. Оскільки різниця між обома частинами числа вдвічі більша за різницю між половиною числа і кожною частиною, то якщо до половини цієї різниці приєднаємо половину числа, одержимо $7\frac{1}{2}$. Віднімаючи від останнього перше, одержимо $2\frac{1}{2}$.

Доведемо твердження, яким користується автор. Позначимо x, y – частини числа, $x + y = a$, $x = a - y$, $x - y = a - 2y$, $x - y = 2\left(\frac{a}{2} - y\right)$. Використаємо цю рівність:

$$\begin{cases} x - y = b \\ x - y = 2\left(\frac{a}{2} - y\right) \end{cases}, \text{ звідки } b = 2\left(\frac{a}{2} - y\right), \frac{b}{2} = \frac{a}{2} - y, y = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}, x = b + y, x = b + \frac{a}{2} - \frac{b}{2},$$

$$x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}.$$

$$\text{Отримали } \begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \\ y = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \end{cases}.$$

За умовою задачі $a = 10, b = 5$, тоді $x = \frac{10}{2} + \frac{5}{2} = 7\frac{1}{2}$, $y = \frac{10}{2} - \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$.

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок. Оволодіння методами розв'язування математичних задач є однією з найважливіших проблем навчання математики. Для її розв'язання важливу роль грають історичні задачі, які підвищують інтерес студентів до вивчення математики, піднімають загальний рівень культури. Запропонований аналіз методів розв'язування систем лінійних рівнянь сприяє пошукам різних способів і визначення раціональнішого. Важливим є подальше дослідження застосування історичного підходу до варіативності методів розв'язування систем лінійних рівнянь у курсі математики основної школи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- Бевз, В. Г. (2005). Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів: Монографія. К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова. (Bevz, V. H. (2005). History of mathematics in teacher training: Monograph. – Kyiv: National Drahomanov Pedagogical University).
- Вашенко-Захарченко, М. Е. (1883). История математики. Т. 1. К.: Университет Святого Владимира. (Vashhenko-Zaharchenko, M. E. (1883). History of Mathematics. Vol. 1. Kiev: St. Vladimir University).
- Дідківська, Т. В., Сверчевська, І. А. (2016). Системи рівнянь у старовинних задачах. Вісник ЖДУ імені Івана Франка, 3(85), 51-56. (Didkivska, T. V., Sverchevska, I. A. (2016). Systems of Equations in Ancient Problems. Zhytomyr Ivan Franko State University Journal, 3(85), 51-56).
- Попов, Г. Н. (1938). Сборник исторических задач по элементарной математике. М.-Л.: ОНТИ. (Popov, G. N. (1938). Historical Problems of Elementary Mathematics: Workbook. Moskow-Leningrad: Joint scientific and technical publishing house).
- Сверчевська, І. А. (2017). Історичний підхід у навчанні методів розв'язування систем лінійних рівнянь. Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти». Суми, 2(10), 37-43. (Sverchevska, I. A. (2017). Historical approach to teaching the methods of solving systems of linear equations. Collection of scientific works «Topical issues of natural science and mathematics education». Sumy, 2(10), 37-43).

6. Сверчевська, І. А. (2015). Методи розв'язування рівнянь в історичних задачах. Математика в рідній школі, 11, 43–47. (Sverchevska, I. A. (2015). The Methods of Quations Solving in Historical Problems. Mathematics at Native School, 11, 43–47).
7. Чашечникова, О. С., Нейчева, І. С. (2017). Ознайомлення учнів основної школи з елементами математичного моделювання (на прикладі змістової лінії «рівняння, нерівності та їх системи»). Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти». Суми, 2(10), 50-57. (Chashechnikova, O. S., Neicheva, I. S. (2017). Familiarize secondary school students with mathematical modeling (for example, content line «Equations, inequalities and their systems»). Collection of scientific works «Topical issues of natural science and mathematics education». Sumy, 2(10), 50-57)
8. Юшкевич, А. П. (1961). История математики в средние века. М.: Госиздат физико-математической литературы. (Yushkevich, A. P. (1961). The History of Medieval Mathematics. Moskow: State Publishing House of Physical and Mathematical Literature).

Сверчевская И. А. Вариативность методов решения систем линейных уравнений в исторических задачах.

В статье исследуется роль исторических задач в формировании знаний о методах их решения. Выделяются задачи, которые приводят к системам линейных уравнений. Анализируются авторские методы их решения математиками разных периодов истории развития математики и дополняются современными методами. Это является продолжением наших исследований разных методов решения исторических задач по алгебре и теории чисел, историко-генетического подхода в подготовке будущих учителей математики.

Предложено систему исторических задач, где выделено два аспекта. А именно, вариативность методов в разных авторских задачах и во втором случае – решение одной и той же задачи разными способами.

Сделан вывод, что такой подход дает возможность образовать банк методов решения систем линейных уравнений и использовать творческий подход к решению математических задач, кроме того, использовать воспитательные и развивающие возможности истории математики.

Обучение методам решения систем линейных уравнений предусмотрено программой по «Линейной алгебре» педагогических специальностей университетов и программой по математике для общеобразовательных учебных заведений, поэтому важным является дальнейшее исследование вариативности методов решения исторических задач для реализации заданий математического образования.

Ключевые слова: математические задачи, методы решения, системы линейных уравнений, исторические задачи, авторские методы, современные методы, банк методов, творческие умения, система исторических задач.

Sverchevska I. A. Variability of methods for linear equations systems solving in historical tasks.

The paper investigates the role of famous historical tasks in building knowledge of linear equations systems solving. The problems, which lead to systems of linear equations, are highlighted. The paper also gives an analysis of the authoring methods for linear equations systems solving, suggested by mathematicians of different times, as well as provides modern methods for solving these systems. This work is a follow-up study of different methods for solving historical tasks in algebra and number theory, including historical and genetic approach in training of teachers of mathematics.

We suggest the system of historical tasks, which comprises two aspects. First, the variability of methods in different authoring problems, and second, solving the same problem in different ways.

The analysis of creative and unconventional approaches to solving linear equations systems was conducted in the «Aryabhatiyam» treatise by Indian mathematician Aryabhata, the «De

numeris datis» treatise by German mathematician Nemorarius, «Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber» by Italian mathematician Giambattista Benedetti, in «Treatise of Algebra» by Scottish mathematician Colin Maclaurin. The variability of methods for solving the same problem was considered by Arab mathematician Alhazen, Indian mathematician Bhaskara II («Crown of treatises»), Italian mathematician Leonardo Pisano («Liber Abaci», section XI), Arab mathematician Beha-Eddin («Essence of Arithmetic»).

At the conclusion, the suggested approach enables the creation of the bank of linear equations solving methods, the using of a creative approach to solving mathematical problems. Besides, the approach allows utilizing the educational and developmental potential of a history of mathematics.

Learning of linear equations solving methods is included in Linear Algebra Curriculum for pedagogical specializations at universities (elimination of variables, Cramer's rule, matrix solution) and in Mathematics Curriculum for schools (addition, substitution, variable replacement, graphing method). Therefore, it is important to continue the research on the variability of methods for linear equations systems solving in historical tasks in mathematical education.

Keywords: mathematical problems, solving methods, systems of linear equations, historical tasks, authoring methods, modern methods, a bank of methods, creative skills, the system of historical tasks.

УДК 37.09

DOI 10.5281/zenodo.2108242

О. М. Яковлєва

ORCID ID 0000-0003-0750-9769

«Південноукраїнський національний педагогічний
університет імені К. Д. Ушинського», м. Одеса

А. В. Пенкова

Виноградівський НВК «ЗОШ I – III ст. – ДНЗ»

С. О. Копач

ORCID ID 0000-0002-1957-5651

Одеська гімназія № 9 Одеської міської ради Одеської області

АНАЛІЗ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВОЇ СКЛАДОВОЇ В ЗАВДАННЯХ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ОЛІМПІАДИ ДЛЯ УЧНІВ

Математична олімпіада – це змагання, метою якого є виявлення найбільш талановитих і обдарованих учнів у галузі математики, підвищення їх мотивації до вивчення математики та розвитку дослідницьких навичок. Для вчителя це можливість удосконалити методи навчання, поглибити власний досвід роботи. У статті розглянуто місце і роль математичних олімпіад у загальній середній освіті України; вивчено особливості проведення етапів Всеукраїнської олімпіади з математики та International Mathematical Olympiad. Зроблено аналіз завдань III і IV етапів Всеукраїнської олімпіади з математики за період 2015-2017 рр. з метою визначення кількості теоретико-числових завдань, виявлено найбільш уживані теоретико-числові факти та методи, які використовуються для розв'язання цих завдань. На підставі проведеного аналізу робиться висновок, що теоретико-числові задачі є необхідною складовою кожного туру математичної олімпіади, тому при підготовці до математичних олімпіад теоретико-числова підготовка учнів 7-11 класів є обов'язковою.

Ключові слова: математичні олімпіади, Всеукраїнська олімпіада з математики, теоретико-числові задачі, підготовка учнів до участі в олімпіаді.