

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Дьюдени Г.Э. 520 головоломок / Г.Э. Дьюдени. – М.: Мир, 1975. – 342 с.
2. Екимова М.А. Задачи на разрезание / М.А. Екимова, Г.П. Кукин. – М.: МЦНМО, 2002. – 120 с.
3. Кордемский Б.А. Удивительный квадрат / Б.А. Кордемский, Н.В. Русалев. – М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1952. – 158 с.
4. Линдгрэн Г. Занимательные задачи на разрезание / Г. Линдгрэн. – М.: Мир, 1977. – 256 с.
5. Чашечникова Л.Г. Геометричні побудови на площині / Л.Г. Чашечникова, С.В. Петренко, О.С. Чашечникова. – Суми: вид-во «Ярославна», 1999. – 108 с.

Надійшла до редакції 12.11.2014

Богатырева И.Н. Задачи на разрезание и методика их решения.

Рассматривается вопрос обучения учащихся решать задачи на разрезание. Выделены этапы в решении таких задач. Предложен план-ориентир, который целесообразно предлагать учащимся на начальном этапе обучения решать задачи на разрезание. Предложено проведение факультатива для учащихся 9 класса «Задачи на разрезание простых геометрических фигур», цель которого познакомить учащихся с задачами на разрезание, научить различным приёмам решения таких задач. Приведен пример факультативного занятия.

Ключевые слова: задача на разрезание, факультативное занятие, учебный диалог.

Bogatyreva I.N. Problems on cutting and techniques of their solving.

The question of training pupils to solve problems on cutting is considered. Steps of solution for such tasks are allocated. The guide-plan which can be offered for students at the initial stage of learning to solve problems on cutting is given. Realization of open classroom «Problems on Cutting of Simple Geometrical Figures» for pupils of the 9th grades with objective to introduce to problems on cutting and to learn various problem-solving procedures for such tasks is suggested. An example of open classroom is provided.

Keywords: a problem on cutting, an open classroom, an educational dialog.

УДК 372.851

**В. Ф. Власенко¹,
А. М. Розуменко²**

¹Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка

²Сумський національний аграрний університет

ВИБРАНІ ПИТАННЯ ТЕМИ «ЧИСЛОВІ РЯДИ» ПРИ ДИФЕРЕНЦІЙОВАНОМУ НАВЧАННІ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

У статті запропоновано зміст додаткового навчального матеріалу з теми «Числові ряди», що можна використовувати в умовах різнорівневої підготовки майбутніх учителів математики з метою узагальнення та систематизації їх знань. Розглянуто приклади знаходження сум рядів без обчислень; обчислення суми рядів за означенням; використання геометричної прогресії, степеневих рядів, диференціальних рівнянь, комплексного аналізу при обчисленні сум числових рядів; випадок, коли сума ряду є інтегралом; а також поняття про узагальнені суми ряду.

Ключові слова: числові ряди, диференціація навчання, підготовка майбутніх учителів математики.

Постановка проблеми. Перебудова вищої школи здійснюється у напрямку забезпечення підготовки майбутнього спеціаліста до професійної творчої праці шляхом активізації самостійної пошукової діяльності студентів, зокрема через розширення меж академічної свободи у виборі різних способів засвоєння навчального матеріалу, тобто диференціації навчального процесу. Спрямованість диференційованого навчання на індивідуально-типологічні особливості студентів забезпечує формування у них умінь вчитися, потребу в самоосвіті, виникнення бажання генерувати ідеї, шукати альтернативні розв'язки стандартних та проблемних ситуацій тощо. На відміну від середньої школи, де ідеї диференціації втілюються досить інтенсивно розробка теоретичних положень і впровадження їх у практику вищого закладу освіти відбувається повільніше. При утвердженні загальноприйнятих положень особистісно орієнтованого навчання фактично продовжується спрямованість навчального процесу на «середнього» студента. У зв'язку із цим, реалізація диференційованого навчання у вищому закладі освіти стає все більш актуальним, оскільки таке навчання створює умови, за яких кожний студент оволодіває тим рівнем професійної підготовки, що відповідає його можливостям. На нашу думку, потребують розробки методичні аспекти навчання студентів в умовах диференційованої підготовки майбутніх фахівців.

Аналіз актуальних досліджень. Диференціація навчання – педагогічне явище, яке є досить складним і багатогранним. Особливої актуальності набуває таке навчання у вищих закладах освіти, де найактивніше проходить процес професійного становлення майбутніх спеціалістів. У сучасній науковій літературі автори виділяють різні аспекти процесу диференціації навчання. Різноманітність підходів і трактувань поняття «диференціація навчання» зумовлюється цілями, засобами та способами його застосування в кожному конкретному випадку.

На основі вивчення педагогічних досліджень вітчизняних та зарубіжних педагогів визначено теоретичні аспекти диференціації навчання у вищому закладі освіти. Виділяють рівневу і профільну диференціацію навчання. Рівнева диференціація – це диференціація за здібностями та успішністю в навчанні, а профільна – за нахилами та інтересами.

Вузівська диференціація передбачає диференціацію освіти та диференціацію навчання. У зміст першої входить структурування освіти на основі врахування певних особливостей студентів у межах відповідних структурних освітніх підрозділів. Яскравим вираженням диференціації освіти у вищому закладі освіти є ступенева освіта, профільне навчання в межах основної спеціальності та інше.

Мета статті: запропонувати зміст додаткового навчального матеріалу з теми «Числові ряди», що можна використовувати в умовах різнорівневої підготовки майбутніх учителів математики з метою узагальнення та систематизації їх знань.

Виклад основного матеріалу. Роль рядів у математиці загальновідома. Це і ефективний апарат наближених обчислень, і апарат представлення широких класів функцій, і засіб розв'язування диференціальних, інтегральних, функціональних рівнянь, обчислення інтегралів, тощо. Кінцевим етапом застосувань рядів є обчислення їх сум, – точне або наближене.

Рівність $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ породжує цілий ряд питань. Перше з них – при чому тут число π ? Адже зліва стоїть ряд чисел, обернених до квадратів натуральних чисел. Наступне питання – як знайшли, що сума цього ряду $\frac{\pi^2}{6}$? Як можна перевірити цю рівність?

1. Суми рядів без обчислень. Виявляється, що з кожного неабсолютно збіжного ряду шляхом перестановки та групування його доданків можна отримати безліч збіжних та розбіжних рядів.

Теорема 1. Для довільного наперед заданого неабсолютно збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і довільного наперед заданого числа $a \in R$ існує послідовність (ε_n) , $|\varepsilon_n| = 1$, дійсних чисел така, що $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n = a$.

Доведення. За умовою ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ розбіжний, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, де S_n – частинні суми цього ряду. Фіксуємо число $a \in R$. Числа ε_n , $|\varepsilon_n| = 1$, $n = 1, 2, \dots, n_1$ візьмемо такими, щоб

$$\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \dots + \varepsilon_{n_1} a_{n_1} = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{n_1}| > a, \quad (1)$$

причому n_1 – найменший з номерів n , для яких виконується нерівність (1). Потім беремо ε_n , $|\varepsilon_n| = 1$, $n = n_1 + 1, \dots, n_2$ так, щоб

$$\varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_{n_2} a_{n_2} = |a_1| + \dots + |a_{n_1}| - (|a_{n_1+1}| + \dots + |a_{n_2}|) < a, \quad (2)$$

причому n_2 – найменший з номерів $n > n_1$, для яких виконується нерівність (2). Продовживши цей процес необмежено, отримаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$, частинні суми якого поперемінно то більші, то менші за a . Оскільки $a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, то цей ряд збіжний до числа a .

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. Для довільного наперед заданого неабсолютно збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і довільного наперед заданого дійсного числа a існує така перестановка $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_k}$ членів цього ряду, при якій сума ряду дорівнює a .

Ця знаменита теорема Рімана, її доведення можна знайти в [2, с. 317-318]. Вона має цікаві узагальнення, зокрема на неабсолютно збіжні ряди комплексних чисел. Якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – неабсолютно збіжний ряд комплексних чисел, то множина сум усіх збіжних (або розбіжних до ∞) рядів, отриманих з ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ за допомогою всіляких перестановок його членів, є або прямою на комплексній площині (включаючи нескінченно віддалену точку) або всією комплексною площиною (також включаючи нескінченно віддалену точку) [1, с. 74].

Теорема 3. Існує послідовність (a_n) раціональних чисел така, що для довільної наперед заданої неперервної на відрізку $[0; 1]$ функції $f(x)$, $f(0) = 0$ можна вказати строго зростаючу послідовність натуральних чисел (n_k) , $n_0 = 0$ таку, що

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n x^n \right)$$

причому збіжність є рівномірною на $[0; 1]$.

Іншими словами, у ряді $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ можна при заданій неперервній на $[0; 1]$ функції $f(x)$, $f(0) = 0$ так розставити дужки, що отриманий ряд буде рівномірно збіжним до $f(x)$ на $[0; 1]$.

Ця фантастична теорема належить польському математику В.Серпінському, її доведення можна знайти в [1, с. 98-100].

2. Обчислення сум рядів за означенням. Це найпростіший метод. Покажемо його на прикладі знаходження суми ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{1}{2n^2}$. Обчислимо кілька перших частинних сум, користуючись формулою $\arctg x + \arctg y = \arctg \frac{x+y}{1-xy}$:

$$S_1 = \arctg \frac{1}{2}, \quad S_2 = \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{8} = \arctg \frac{2}{3},$$

$$S_3 = S_2 + a_3 = \arctg \frac{2}{3} + \arctg \frac{1}{18} = \arctg \frac{3}{4}.$$

Припустимо, що $S_n = \arctg \frac{n}{n+1}$, тоді

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2(n+1)^2} = \operatorname{arctg} \frac{2n(n+1)^2 + n+1}{2(n+1)^3 - n} = \operatorname{arctg} \frac{n+1}{n+2},$$

звідки за індукцією маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Отже, сума ряду $S = \frac{\pi}{4}$. Зауважимо, що цей результат можна отримати, використавши ряд

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots,$$

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3(2n^2)^3} + \frac{1}{5(2n^2)^5} - \dots$$

Але тут доведеться мати справу з громіздкими викладами.

Наведений приклад показує, що в цьому випадку треба враховувати індивідуальні особливості ряду.

3. Використання геометричної прогресії. В основі застосування геометричної прогресії до обчислення сум числових рядів лежить формула:

$$\frac{1}{1-f(x)} = 1 + f(x) + f^2(x) + \dots + f^n(x) + \dots, \text{ де } |f(x)| < 1, \forall x \in D(f). \quad (3)$$

Так, при $f(x) = x^k, |x| < 1, k \in \mathbb{N}$ маємо рівність

$$\frac{1}{1-x^k} = 1 + x^k + x^{2k} + \dots + x^{nk} + \dots,$$

зокрема, при $k = 1, 2, 3$ отримаємо

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots,$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots,$$

$$\frac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + x^6 + \dots + x^{3n} + \dots$$

Диференціюючи рівність (3), будемо мати

$$\frac{f'(x)}{(1-f(x))^2} = f'(x) + 2f(x)f'(x) + \dots + n(f(x))^{n-1}f'(x) + \dots,$$

зокрема

$$\frac{kx^{k-1}}{(1-x^k)^2} = kx^{k-1} + 2kx^{2k-1} + \dots + nkx^{nk-1} + \dots$$

Для $k = 1, 2, 3$ маємо

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots,$$

$$\frac{2x}{(1-x^2)^2} = 2x(1 + 2x^2 + \dots + nx^{2(n-1)} + \dots),$$

$$\frac{3x^2}{(1-x^3)^2} = 3x^2(1 + 2x^3 + \dots + nx^{3(n-1)} + \dots).$$

Якщо в цих рівностях покласти $x = \frac{1}{2}$, то будемо мати

$$1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots = 4,$$

$$1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-1)} + \dots = \frac{16}{9},$$

$$1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3(n-1)} + \dots = \frac{64}{49}.$$

Інтегруючи рівність (3), на відрізку $[a; b]$, що належить $D(f), |f(x)| < 1$, отримаємо

$$\int_a^b \frac{dx}{1-f(x)} = \int_a^b dx + \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx + \dots + \int_a^b f^n(x)dx + \dots$$

При $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\int_0^x \frac{dx}{1-x^k} = x + \frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \dots + \frac{x^{nk+1}}{nk+1} + \dots, \quad |x| < 1,$$

зокрема, для $k = 1, 2$

$$\int_0^x \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots,$$

$$\int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots,$$

що при $x = \frac{1}{2}$ дає

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\ln \frac{1}{2} = \ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} + \dots$$

Отриманий ряд швидко збіжний і зручний для обчислення значення $\ln 2$.

4. Використання степеневих рядів. В основі застосування степеневих рядів до обчислення сум числових рядів лежать ряди Тейлора і Маклорена:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \dots,$$

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot x^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \cdot x^n + \dots$$

Уже розклади основних елементарних функцій у степеневі ряди є джерелом обчислення сум числових рядів. Так, з розкладу

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad |x| < 1$$

маємо

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right),$$

звідки при $x = \frac{a-1}{a+1}$, $a > 1$ отримуємо формулу

$$\ln a = 2 \left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^5 + \dots \right),$$

яка дозволяє обчислювати натуральні логарифми дійсних чисел $a > 1$.

З розкладу

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| \leq 1$$

при $x = 1$ маємо рівність

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots,$$

за допомогою якої можна обчислювати значення числа π . Проте із-за повільної збіжності цей ряд непридатний для обчислення π з великою точністю. Так, щоб обчислити π з точністю до 0,01 треба взяти 50 членів ряду. Але за допомогою цього ряду і формули

$$\operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} v = \operatorname{arctg} \frac{u+v}{1-uv}$$

при u і v таких, що $\frac{u+v}{1-uv} = 1$, будемо мати рівність

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} v,$$

придатну для обчислення π .

Так для $u = \frac{120}{119}$, $v = -\frac{1}{239}$, $\frac{u+v}{1-uv} = 1$,

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{120}{119} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$$

маємо рівність, яка забезпечує високу точність обчислення π . Якщо тут у розкладі $\operatorname{arctg} x$ взяти всього 4 члени $\operatorname{arctg} \frac{1}{5}$ і один член $\operatorname{arctg} \frac{1}{239}$, то $\pi \approx 3,1415926$, причому всі виписані знаки вірні.

Розклади для $\sin x$, $\cos x$, e^x , $x \in R$ дають можливість обчислювати значення цих функцій з довільною точністю $\forall x \in R$. Більше того, ряди для цих функцій дають можливість доведення ірраціональності їх значень для $x \in Q$!

Розклад функції $\frac{x}{e^x-1}$ у степеневий ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{k!} x^k$ дає такі рівності для чисел β_k :

$$\beta_0 = 1, \quad \frac{1}{2!} \beta_0 + \beta_1 = 0, \dots, \quad \frac{1}{(k+1)!} \beta_0 + \frac{1}{k!} \beta_1 + \dots + \frac{1}{1!} \beta_k = 0,$$

з яких послідовно знаходимо, що

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 1, & \beta_1 &= -\frac{1}{2}, & \beta_2 &= \frac{1}{6}, & \beta_3 &= 0, & \beta_4 &= -\frac{1}{30}, & \beta_5 &= 0, \\ \beta_6 &= \frac{1}{42}, & \beta_7 &= 0, & \beta_8 &= -\frac{1}{30}, & \beta_9 &= 0, & \beta_{10} &= \frac{5}{66}, & \beta_{2n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Якщо ввести числа B_n за формулою $\beta_{2n} = (-1)^n B_n$, то будемо мати

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{6}, & B_2 &= \frac{1}{30}, & B_3 &= \frac{1}{42}, & B_4 &= \frac{1}{30}, & B_5 &= \frac{5}{66}, & B_6 &= \frac{691}{2730}, \\ B_7 &= \frac{7}{6}, & B_8 &= \frac{3617}{510}, & B_9 &= \frac{43867}{798}, & B_{10} &= \frac{174611}{330}. \end{aligned}$$

Числа B_n називаються числами Бернуллі. Суми багатьох рядів містять ці числа.

Так

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \pi^2 B_1 = \frac{\pi^2}{6}, & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} &= \pi^4 \frac{B_2}{3} = \frac{\pi^4}{90}, & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{3}{4} \pi^2 B_1 = \frac{\pi^2}{8}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} &= \frac{5}{16} \pi^4 B_2 = \frac{\pi^4}{96}, & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} &= \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_k, & k &\in N. \end{aligned}$$

Нижче, за допомогою рядів Фур'є суми цих рядів будуть знайдені інакше.

Ряд для e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in R$$

дає можливість довести ірраціональність числа e , а також обчислити з довільною точністю будь-які степені і корені числа e . Так,

$$\sqrt[k]{e} = e^{\frac{1}{k}} = 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{k^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{k^3} + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{k^n} + \dots, \quad k > 1, k \in N.$$

5. Використання рядів Фур'є. Невичерпним джерелом обчислення сум числових рядів є ряди Фур'є та рівність Парсеваля. В основі застосування рядів Фур'є лежать рівності

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (4)$$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx, \quad (5)$$

справедливі для 2π – періодичних функцій з інтегруванням за Ріманом квадратом $f(x)$.

Розглянемо кілька прикладів. Функція $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ в інтервалі $(0; 2\pi)$ є сумою ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$. Покладаючи тут $x = 1$, отримуємо рівність $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi-1}{2}$, а використавши рівність (5), будемо мати

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi-x}{2} \right)^2 dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

Відомо, що ряд Фур'є можна почленно інтегрувати, навіть, якщо він розбіжний. Проінтегруємо рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi-x}{2} \quad (6)$$

на відрізку $[0; x]$, $0 < x < 2\pi$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{4} + \frac{x^2}{4}. \quad (7)$$

Покладаючи в рівності (7) $x = 1$, будемо мати

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4},$$

а застосовуючи (5), отримаємо $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Інтегруючи рівність (7), знайдемо, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} = \frac{\pi^2}{6} x - \frac{\pi}{4} x^2 + \frac{x^3}{12},$$

звідки $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

Продовжуючи вказаний процес приходимо до рівності

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} = \frac{2n^{2p-1} \cdot \pi^{2p} \cdot B_p}{(2p)!}, \quad p \in N,$$

з якої неважко отримати рівності

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2p}} = \frac{(2^{2p}-1) \cdot \pi^{2p} \cdot B_p}{2 \cdot (2p)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{2p}} = \frac{(2^{2p-1}-1) \cdot \pi^{2p} \cdot B_p}{(2p)!},$$

де B_p – числа Бернуллі.

Багато прикладів обчислення сум рядів за допомогою рядів Фур'є можна знайти в [4, с. 446-463].

6. Використання диференціальних рівнянь. Ряд

$$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (8)$$

Абсолютно збіжний на R . Позначимо його суму $y(x)$. Тоді

$$y'(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots,$$

$$y''(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!} + \dots$$

звідки $y'' = y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Розв'язком цього рівняння з початковими умовами є функція $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$. Отже, сума ряду (8) є $\operatorname{sh} x$.

Вказаним методом можна довести розклади в степеневі ряди функцій $e^x, \sin x, \cos x, (1+x)^\alpha$.

Розглянемо більш складний приклад так званого гіпергеометричного ряду

$$F(\alpha; \beta; \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n)\beta(\beta+1) \dots (\beta+n)}{(n+1)! \cdot \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n)} x^{n+1} + \dots, \quad x \in (-1; 1) \quad (9)$$

Який є частинним розв'язком диференціального рівняння

$$x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)y' - \alpha\beta y = 0.$$

Функція $F(\alpha; \beta; \gamma; x)$ цікава тим, що через неї виражаються елементарні функції, спеціальні функції Лежандра, Чебишева, Лагерра, Ерміта та інші [10, с. 769-774]. Наприклад:

$$(1+x)^n = F(-n; 1; 1; -x),$$

$$\ln(1+x) = x F(1; 1; 2; -x),$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x F\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; x^2\right),$$

$$\arcsin x = x F\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right),$$

$$\operatorname{arctg} x = x F\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; -x^2\right),$$

$$\sin nx = n \sin x F\left(\frac{1+n}{2}; \frac{1-n}{2}; \frac{3}{2}; \sin^2 x\right),$$

$$\cos nx = \cos x F\left(\frac{1+n}{2}; \frac{1-n}{2}; \frac{3}{2}; \sin^2 x\right), \quad [10, \text{с. 281} - 282].$$

7. Використання комплексного аналізу. В ряді випадків обчислення сум числових рядів у дійсній області спрощується переходом в комплексну область. Розглянемо приклади.

1) Обчислити суми рядів $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin nx$, $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx$, $|r| < 1$.

Обчислимо суму S ряду $\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{inx}$, який є геометричною прогресією із знаменником $q = re^{ix}$, $|q| = |re^{ix}| < 1$:

$$S = \frac{r e^{ix}}{1 - r e^{ix}} = \frac{r (\cos x - r + i \sin x)}{1 + r^2 - 2r \cos x}.$$

Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin nx = \operatorname{Im} S = \frac{r \sin x}{1 + r^2 - 2r \cos x},$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx = \frac{1}{2} + \operatorname{Re} S = \frac{1 - r^2}{2(1 + r^2 - 2r \cos x)}.$$

Обчислення сум цих рядів у дійсній області пов'язане із значними труднощами.

2) Обчислити суму ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$.

Маємо, [6, с. 154]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \operatorname{Re} e^{\cos x + i \sin x} = e^{\cos x} \cdot \cos(\sin x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Зокрема, при $x = 0$ маємо розклад e , при $x = \frac{\pi}{2}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n \frac{\pi}{2}}{n!} = \cos 1$.

8. Коли сума ряду є інтегралом. В ряді випадків суму числового ряду можна представити інтегралом. Класичним прикладом є сума ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \int_0^1 \frac{dx}{x^x}, \quad [6, \text{с. 160}].$$

Інші приклади, [7, с. 233 – 358]:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (2k+1)} &= \int_0^1 e^{-x^2} dx, & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k! (2k-1)} &= \int_0^1 \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} dx, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch} x^2}, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin k\lambda}{2k-1} &= \frac{\sin \lambda}{2} \int_0^1 \frac{1}{1 - 2x \cos \lambda + x^2} \frac{dx}{\sqrt{x}}, & \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^3} &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{-nx}}{1 - e^{-x}} dx. \end{aligned}$$

Доведення цих рівностей базується на розкладі підінтегральних функцій у степеневі ряди.

9. Покращення збіжності ряду. У випадку повільної збіжності ряду іноді вдається, шляхом його перетворення, отримати швидше збіжний ряд. Історично першими такі перетворення запропонували Ейлер, Крамер, Марков. Розглянемо перетворення Ейлера.

Нехай маємо збіжний ряд, записаний у вигляді

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k x^k, \quad x > 0. \quad (10)$$

Зауважимо, що така форма запису виявляється зручною у наступних перетвореннях і зовсім не означає, що всі $a_k > 0$. Розглянемо послідовні різниці:

$$\begin{aligned} \Delta a_k &= a_{k+1} - a_k, & \Delta^2 a_k &= \Delta a_{k+1} - \Delta a_k = a_{k+2} - 2a_{k+1} + a_k, \dots, \\ \Delta^p a_k &= \Delta^{p-1} a_{k+1} - \Delta^{p-1} a_k = a_{k+p} - C_p^1 a_{k+p-1} + C_p^2 a_{k+p-2} - \dots + (-1)^p a_k. \end{aligned}$$

Можна показати [2, с. 385 – 386], що

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k x^k = \frac{1}{1+x} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \Delta^p a_0 \left(\frac{x}{1+x} \right)^p. \quad (11)$$

Рівність (11) і є перетворенням Ейлера. Часто вона застосовується при $x = 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \Delta^p a_0}{2^{p+1}}.$$

Наприклад, для повільно збіжного ряду $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$

$$\Delta^p a_0 = (-1)^p \frac{p!}{(1+p)!} = \frac{(-1)^p}{p+1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(p+1)2^{p+1}} = \ln 2.$$

Отриманий ряд збігається значно швидше, ніж вихідний. Так, для обчислення $\ln 2$ за першим рядом з точністю до 0,01 треба взяти 99 членів, а за другим рядом – менше 5.

Перетворення Ейлера для $\operatorname{arctg} x$ дає формулу

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{2k+1} = \frac{x}{1+x^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^p,$$

з якої при $x = 1$ маємо

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(2p)!!}{2^{p+1} (2p+1)!!}. \quad (12)$$

Формула (12) зручна для обчислення π .

З перетвореннями Куммера і Маркова можна познайомитися в [2, с. 388 – 394].

10. Поняття про узагальнені суми ряду. Виявляється, що можна приписувати суми і деяким розбіжним рядам. Так, розбіжному ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ приписували суму $\frac{1}{2}$, мотивуючи це тим, що з розкладу

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots,$$

справедливого для $|x| < 1$, при $x = 1$ якраз і отримуємо $\frac{1}{2}$. Початок XIX століття ознаменувався бурхливою дискусією математиків щодо суми розбіжного ряду. Л.Ейлер один з перших зрозумів, що треба питати не чому дорівнює сума розбіжного ряду, а як розумно визначити суму розбіжного ряду. Так народилася обширна нині теорія узагальненого підсумовування розбіжних рядів. Класична монографія Г.Харді «Розбіжні ряди» підвела підсумок досліджень XIX ст. по цій теорії. Розбіжні ряди виявились корисними в математиці.

Тут ми вкажемо на деякі історично перші методи узагальненого підсумовування розбіжних рядів – метод середніх арифметичних і метод Абеля-Пуассона. Для ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ з частинними сумами S_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) розглянемо послідовність

$$t_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Якщо існує

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = S < \infty,$$

то число S називають узагальненою сумою ряду і пишуть

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(C, 1).$$

Для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ послідовність (t_n) має вид

$$t_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{якщо } n = 2k \\ \frac{n}{2n-1}, & \text{якщо } n = 2k-1, \quad k \in N, \end{cases}$$

звідки $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \frac{1}{2}$, тому узагальнена сума цього ряду $\frac{1}{2}$.

Незважаючи на простоту цього методу, він широко використовується в теорії рядів Фур'є. Виявляється, що за його допомогою можна відновлювати функцію $f(x)$ за її рядом Фур'є у випадку розбіжності цього ряду в точці x ! [4, с. 601-613].

Метод Абеля-Пуассона полягає в тому, що по ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ будують степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Якщо він збіжний на інтервалі $(0, 1)$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, існує $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = S$, то число S називають узагальненою сумою ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ і пишуть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(A - P)$. Так, для ряду $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f(x) = \frac{1}{1+x} \rightarrow \frac{1}{2}$ ($x \rightarrow 1-0$), $S = \frac{1}{2}$.

Метод Абеля-Пуассона також використовується в теорії рядів Фур'є [4, с. 601-613].

Детальніше з цим та іншими методами узагальненого підсумовування розбіжних рядів можна познайомитись в [2, с. 394-418] та по монографії Г.Харді [11].

Висновки та перспективи подальших наукових досліджень. Запропонований навчальний матеріал з теми «Числові ряди» спрямований на усвідомлення майбутніми вчителями математики таких філософських категорій, як «скінченне» та «нескінченне». На нашу думку, його можна використовувати на узагальнюючих лекціях, факультативних та гурткових заняттях або для індивідуальних завдань при вивченні відповідних тем.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гелбаум Б. Контрпримеры в анализе / Гелбаум Б., Олмстед Дж. – М.: Мир, 1967. – 251 с.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.2. / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1966. – 800 с.
3. Коровкин П.П. Математический анализ, ч.1. / П.П. Коровкин. – М.: Просвещение, 1972. – 448 с.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.3. / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1963. – 656 с.
5. Курченко О.О. Задачі студентських олімпіад з математики / О.О. Курченко, К.В. Рабець. – Суми: ДВНЗ УАБС НБУ, 2008. – 166 с.
6. Ляшко И.И. Математический анализ в примерах и задачах, ч.2. / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач. – К.: Вища школа, 1977. – 672 с.
7. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: ФМ, 1963. – 1100 с.
8. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов (и другие математические формулы) / Г.Б. Двайт – М.: Наука, 1964. – 228 с.
9. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: ФМ, 1958. – 468 с.
10. Корн Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 831 с.
11. Харди Г. Расходящиеся ряды / Г. Харди. – М.: ИЛ, 1951. – 504 с.

Надійшла до редакції 17.11.2014

Власенко В.Ф., Розуменко А.М. Избранные вопросы темы «Числовые ряды» при дифференцированном обучении будущих учителей математики.

В статье предложено содержание дополнительного учебного материала по теме «Числовые ряды», который можно использовать в условиях разноуровневой подготовки будущих учителей математики с целью обобщения и систематизации их знаний. Рассмотрены примеры нахождения сумм рядов без вычислений; вычисления суммы рядов по определению; использование геометрической прогрессии, степенных рядов, дифференциальных уравнений, комплексного анализа при исчислении сумм числовых рядов; случай, когда сумма ряда является интегралом, а также понятие об обобщенных суммах рядов.

Ключевые слова: *числовые ряды, дифференциация обучения, подготовка будущих учителей математики.*

Vlasenko V.F., Rozumenko A.O. Selected issues theme «number series» with differentiated training future teachers of mathematics.

This paper proposes an additional content of teaching material on the topic «The number of rows» that can be used at different levels of training future teachers of

mathematics for the purpose of generalization and systematization of knowledge. Examples of amounts rows without computing; calculation of series by definition; using geometric progression, power series, differential equations, complex analysis when calculating numerical series; case where the sum of the series is integral, and the concept of the generalized sum row.

Keywords: *numerical series, differentiation of instruction, training future teachers of mathematics.*

УДК 378+371.134+372.851

Є. А. Колесник

Сумський державний педагогічний університет ім.А.С.Макаренка

ВПЛИВ ЗМІСТОВОГО НАПОВНЕННЯ КУРСУ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ НА РОЗВИТОК ТВОРЧОГО МИСЛЕННЯ СТУДЕНТІВ

Розглянуто один із компонентів методичної системи – зміст навчання курсу елементарної математики у педагогічних вищих навчальних закладах з точки зору спрямованості на розвиток творчого мислення студентів. Формування готовності майбутнього вчителя математики до творчості у процесі навчання елементарної математики забезпечується на основі раціонально підбраного змістового наповнення даної навчальної дисципліни. З метою виокремлення певних особливостей змістового наповнення курсу елементарної математики щодо наявності творчого компонента було проаналізовано робочі програми деяких вищих педагогічних навчальних закладів України, Росії та Білорусі за останні роки. У статті запропоновано, яким чином у процесі розв'язування конкретних завдань з різних тем курсу елементарної математики можна розвивати наступні компоненти творчого мислення студентів: нестандартність, нешаблонність мислення, дивергентність мислення, евристичність мислення, ефективність мислення, творча активність та їх відповідні підкомпоненти, які представлено та охарактеризовано у дослідженнях О.С. Чашечникової.

Ключові слова: *змістове наповнення курсу елементарної математики, творче мислення, майбутній вчитель математики.*

Постановка проблеми. Вхідження України у Європейський освітній простір неможливе без змін у системі вищої освіти. З метою підготовки конкурентоспроможних фахівців для забезпечення потреб суспільства, ринку праці та держави у липні 2014 року було прийнято новий Закон України «Про вищу освіту» [3], що регламентує основні правові, організаційні, фінансові засади функціонування системи вищої освіти. Відповідно до головних положень Болонської декларації вищі навчальні заклади України, зокрема й педагогічні університети, працюють за кредитно-модульною системою навчання, що вносить певні корективи як до навчальних планів та різного роду нормативних документів, так і до організації процесу викладання навчальних дисциплін. Але в умовах реформування української системи освіти основним завданням неодмінно залишається забезпечення якості вищої освіти.

Однією з основних дисциплін, що забезпечує фахову підготовку майбутнього вчителя математики, є елементарна математика. Нами неодноразово зазначалося, що метою курсу елементарної математики є надання студентам ґрунтовної підготовки з шкільного курсу математики, ознайомлення з його науковими основами, що є однією з умов ефективності методичної підготовки майбутнього вчителя математики, підготовки до роботи з обдарованими учнями, до розвитку творчого мислення