І.О. Мороз, В.С. Іваній, Р.І. Холодов
Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка,
teorfiz09@rambler.ru

КІНЕМАТИКА ПРОЦЕСІВ РОЗПАДУ ТА ЗЛИТТЯ ЧАСТИНОК У НАВЧАЛЬНОМУ КУРСІ СТВ

При вивченні взаємодії елементарних частинок, ядерних реакцій і дослідженні радіаційного впливу на властивості речовини, типовими є задачі описання розсіяння, розпаду та з'єднання (злиття) частинок. Ґрунтуючись лише на законах збереження, можна знайти їх загальні закономірності.

1. Розпад частинок

Для того, щоб проілюструвати закони збереження енергії та імпульсу розглянемо процес розпаду однієї частинки на декілька частин. Сам механізм розпаду може бути не заданим, але опираючись на ці два закони збереження, легко можна одержати всі найбільш важливі властивості процесу.

Розглянемо частинку масою *M.* Система відліку, яка пов'язана із цією частинкою, одночасно являється і системою центру мас.

У цій системі її імпульс дорівнює нулю ($\vec{P} = 0$). Енергія частинки складається лише із енергії спокою $E_0=mc^2$. Нехай частинка розпадається на N частинок із масами m_1, $m_2,...,m_N$. Запишемо закон збереження енергії і релятивістської маси для такого процесу:

$$E_0 = \sum_{a=1}^{N} \varepsilon_a, \qquad (1)$$

$$M = \sum_{a=1}^{N} \frac{m_a}{\sqrt{1-\upsilon_a^2/c^2}}, \qquad (2)$$

де υ_a і ε_a – швидкість і енергія *a*-ої частинки, що утворилася в результаті розпаду.

Із формули (2) явно витікає, що в релятивістській механіці не виконується закон збереження мас:

$$M \neq \sum_{a=1}^{N} m_a.$$

У знаменнику (2) корінь менший за одиницю, оскільки швидкості масивних частинок завжди менші швидкості світла. Отже, розпад частинки є можливим, якщо маса частинки, що розпадається, більше суми мас тих частинок, що утворюються:

$$M \geq \sum_{a=1}^{N} m_a,$$

при цьому величина

$$\Delta m = M - \sum_{a=1}^{N} m_a, \qquad (3)$$

яка дорівнює різниці між масою зв'язаної системи частинок і сумою їх мас у вільному стані, називається *дефектом маси*. Це та частина маси початкової частинки, яка, в перерахуванні на енергію,

$$\Delta mc^2 = Mc^2 - \sum_{a=1}^{N} m_a c^2 \qquad (4)$$

йде на *енергію зв'язку* частинок m_a у частинці *M*. Цю величину також називають *енергія розпаду*, тому що після розпаду енергія зв'язку Δmc^2 переходить у кінетичну енергію частинок, що утворюються. Якщо $\Delta m = 0$, тобто маса початкової частинки у точності дорівнює сумі мас частинок, що утворюються, то початкове тіло розпадається на нерухомі частинки. Це, так званий, *поріг реакції*. Частинка з масою, яка менша *M*, розпадатися на задані частинки не може.

Розглянемо найбільш простий випадок – це розпад на дві частинки. Отже, будемо вважати що в системі відліку, де частинка *M* була нерухома, у певний момент часу вона розпадається на дві з масами m_1 і m_2. Знайдемо енергії цих частинок: $\varepsilon_1 - ?, \varepsilon_2 - ?$ Закон збереження енергії має простий вигляд

$$Mc^2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \qquad (5)$$

У вибраній системі відліку, за законом збереження імпульсу, дві частинки, що утворилися, розлітатимуться в протилежних напрямках, тобто із однаковими за модулем і протилежними за знаком імпульсами: $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$.

Із рівності квадратів імпульсів частинок та з використанням релятивістського співвідношення між енергією та імпульсом:

$$\varepsilon^2 = p^2c^2 + m^2c^4,$$

нескладно одержати наступну рівність:

$$\varepsilon_1^2 - m_1^2c^4 = \varepsilon_2^2 - m_2^2c^4,$$

яку перепишемо у вигляді

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = (m_1^2 - m_2^2)c^4.$$

У лівій частині цього виразу, суму енергій, згідно з (5), замінюємо на Mc^2, у результаті можемо записати

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{(m_1^2 - m_2^2)c^2}{M}.$$

Цей вираз, разом із законом збереження енергії (5), утворює систему рівнянь для невідомих $\varepsilon_1, \varepsilon_2$:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \dfrac{(m_1^2 - m_2^2)c^2}{M}. \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = Mc^2 \end{cases}$$

Сума і різниця цих рівнянь дає подвоєні значення шуканих енергій:

$$\varepsilon_1 = \frac{(m_1^2 - m_2^2 + M^2)c^2}{2M}, \quad \varepsilon_2 = \frac{(m_2^2 - m_1^2 + M^2)}{2M}. \qquad (6)$$

Корисно виконати це ж завдання, але уже в чотиривимірній коваріантній формі. При викладі законів фізики у 4-вимірному вигляді не можна розглядати окремо імпульс і енергію частинок, оскільки вони об’єднуються у єдиний 4-імпульс.

Запишемо контраваріантні 4-імпульси (індекс вгорі) вихідної частинки та продуктів її розпаду:

$$P^i = (E/c, \vec{P}), \quad p_1^i = (\varepsilon_1/c, \vec{p}_1), \quad p_2^i = (\varepsilon_2/c, \vec{p}_2).$$

З урахуванням вибору системи відліку, у якій початкова частинка нерухома, її 4-імпульс дорівнює:

$$P^i = (Mc, 0).$$

Для 4-вимірних імпульсів виконується закон збереження, який стверджує: *сумарний 4-вимірний імпульс замкнутої системи не змінюється*.

$$\sum_a (p^i)_a = const. \qquad (7)$$

Нульова компонента цього закону відповідає закону збереження енергії, а просторові компоненти відповідають закону збереження імпульсу. У випадку, який ми розглядаємо, закон збереження 4-імпульсу в контраваріантній формі має вигляд

$$P^i = p_1^i + p_2^i. \qquad (8)$$

Звідси виразимо 4-імпульс 2-ої частинки

$$p_2^i = P^i - p_1^i. \qquad (9)$$

У коваріантній формі матимемо такий же вираз, але з нижніми індексами

$$p_{2i} = P_i - p_{1i}. \qquad (10)$$

Перемножимо вирази (9) і (10) та розкриємо дужки. Врахуємо також, що $A_i B^i = A^i B_i$:

$$p_{2i} p_2^i = (P_i - p_{1i})(P^i - p_1^i) = P_i P^i - 2 p_{1i} P^i + p_{1i} p_1^i. \qquad (11)$$

Використовуючи співвідношення $p_i p^i = m^2 c^2$ для квадратів 4-імпульсів даних частинок

$$p_{2i} p_2^i = m_2^2 c^2, \quad P_i P^i = M^2 c^2, \quad p_{1i} p_1^i = m_1^2 c^2,$$

а також вираз для скалярного добутку двох 4-векторов $A_i B^i = A_0 B_0 - \vec{A}\vec{B}$, який застосуємо до імпульсів p_{1i} і P^i: $p_{1i} P^i = p_{10} P_0 - \vec{p}_1 \vec{P}$,

вираз (11) перепишемо у вигляді

$$m_2^2 c^2 = M^2 c^2 + m_1^2 c^2 - 2(p_{10} P_0 - \vec{p}_1 \vec{P}).$$

У цьому виразі скалярний добуток $\vec{p}_1 \vec{P} = 0$, оскільки $\vec{P} = 0$, а $p_{10} P_0$ дорівнює:

$$p_{10} P_0 = \frac{\varepsilon_1}{c} \cdot \frac{E}{c} = \varepsilon_1 M.$$

У результаті маємо: $m_2^2 c^2 = M^2 c^2 + m_1^2 c^2 - 2\varepsilon_1 M$,

звідки слідує шуканий вираз для енергії ε_1 (6).

Аналогічно знаходимо вираз ε_2. Для цього потрібно із закону збереження 4-імпульсу (8) виразити 4-імпульс p_1^i, а потім розписати скалярний добуток контраваріантних на коваріантні компоненти цього імпульсу $p_1^i p_{1i}$.

2. Злиття частинок

Розглянемо ще один приклад, який ілюструє закони збереження релятивістського імпульсу і енергії, це процес злиття двох частинок із масами m_1 і m_2 в одну - з масою *M*, тобто процес зворотний, до розглянутого раніше процесу розпаду частинки.

Нехай до зіткнення одна із частинок (для визначеності частинка з масою m_2) покоїться. Система відліку, в якій одна з частинок покоїться, називається *лабораторна система «*Л». При цьому частинка, що покоїться, називається *мішенню*, а частинка, яка налітає на мішень, – *частинка-бомбардир.*

Визначимо швидкість, з якою частинка, що утворилася, рухатиметься відносно системи «Л». Для цього скористаємося співвідношенням між її імпульсом, швидкістю та енергією:

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}c^2}{E}. \qquad (1)$$

Запишемо закони збереження енергії та імпульсу для даного процесу

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = E, \quad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{P}. \qquad (2)$$

Для нерухомої частинки енергія та імпульс дорівнюють

$$\varepsilon_2 = m_2 c^2, \quad \vec{p}_2 = 0. \qquad (3)$$

Закони збереження приймають вигляд:

$$E = \varepsilon_1 + m_2 c^2, \quad \vec{P} = \vec{p}_1.$$

Підставляємо ці співвідношення в (1) і знаходимо шуканий вираз для швидкості

$$\vec{V} = \frac{\vec{p}_1 c^2}{\varepsilon_1 + m_2 c^2}. \qquad (4)$$

Відзначимо, що система відліку, в якій частинка, що утворилася, нерухома, є системою центра інерції (система центра «Ц»), оскільки у цій системі повний імпульс дорівнює нулю. Звідси витікає, що швидкість (4) – є швидкість руху системи центра «Ц» відносно лабораторної системи «Л». У цьому можна переконатися безпосередньо, використовуючи закони перетворення енергії та імпульсу при переході від однієї системи відліку до іншої.

Позначио штрихованими символами фізичні величини, визначені в системі «Ц», і не штрихованими – в системі «Л». Спрямуємо осі x, x' вздовж вектора швидкості, тоді

$$V_x = V = \frac{p_{1x} c^2}{\varepsilon_1 + m_2 c^2}.$$

x - компоненти імпульсів початкових частинок у системі «Ц», згідно зі зворотним перетворенням Лоренца, дорівнюють:

$$p_{1x}' = \gamma(p_{1x} - \frac{V}{c^2}\varepsilon_1), \quad p_{2x}' = \gamma(p_{2x} - \frac{V}{c^2}\varepsilon_2).$$

Підставляючи в ці вирази швидкість V, а також враховуючи (3), маємо

$$p_{1x}' = \gamma(p_{1x} - \frac{p_{1x}}{\varepsilon_1 + m_2 c^2}\varepsilon_1) = \gamma p_{1x} \frac{m_2 c^2}{\varepsilon_1 + m_2 c^2} = \gamma m_2 V,$$

$$p_{2x}' = -\gamma \frac{V}{c^2}\varepsilon_2 = -\gamma m_2 V.$$

У результаті маємо: $p_{1x}' = -p_{2x}'$, або $p_{1x}' + p_{2x}' = 0$, що і є визначенням системи центру інерції.

Нарешті, визначимо масу M частинки, що утворилася. Для цього скористаємося співвідношенням між енергією та імпульсом частинки:

$$E = \sqrt{M^2 c^4 + P^2 c^2},$$

Звідки $$M^2c^4 = E^2 - P^2c^2.$$

Підставляючи сюди вирази (2) і (3), знаходимо:

$$M^2c^4 = (\varepsilon_1 + m_2c^2)^2 - p_1^2c^2 = \varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1 m_2c^2 + m_2^2c^4 - (\varepsilon_1^2 - m_1^2c^4) =$$
$$= m_1^2c^4 + m_2^2c^4 + 2\varepsilon_1 m_2c^2.$$

Або остаточно

$$M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \frac{2\varepsilon_1 m_2}{c^2}}. \qquad (5)$$

Експериментально закони збереження релятивістської енергії та релятивістської маси, а також явище – дефект маси були підтверджені при вивченні руху частинок у прискорювачах елементарних частинок, а також при ядерних реакціях. Як відомо, ядра атомів складаються з Z протонів і (A-Z) нейтронів, де Z - зарядове число або, що те ж саме - порядковий номер у таблиці елементів Менделєєва, A - масове число, яке показує у скільки разів маса даного атома більше за $^1/_{12}$ маси атома вуглецю ^{12}C. До створення СТВ і релятивістської механіки, як уже зазначалось, вважався справедливим закон збереження звичайної маси. Тому очевидно, що маса атома повинна виражатися формулою

$$M_{am} = Zm_p + (A - Z)m_n,$$

де m_p, m_n – маса протона і нейтрона відповідно.

Проте вся сукупність експериментальних фактів говорить про те, що маса атома менше величини, розрахованої за даною формулою на величину Δm, тобто на дефект мас:

$$M_{am} = Zm_p + (A - Z)m_n - \Delta m$$

звідки

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - M_{am}. \qquad (6)$$

Якщо ліву і праву частину виразу (6) помножити на c^2 і розділити на число частинок, то отримаємо енергію, яка приходиться на один нуклон. Ця величина називається *енергія зв'язку частинок в ядрі*:

$$\varepsilon_{cв} = \frac{\Delta mc^2}{A} = \frac{Zm_pc^2}{A} + (1 - \frac{Z}{A})m_nc^2 - \frac{M_{am}c^2}{A}. \qquad (7)$$

Для атомних ядер із масовим числом A>20 енергія зв'язку нуклонів складає ~8*МеВ/нукл* (див. рис.1).

На практиці спостерігається не злиття протонів і нейтронів в ядра, а синтез легких ядер у більш важкі.

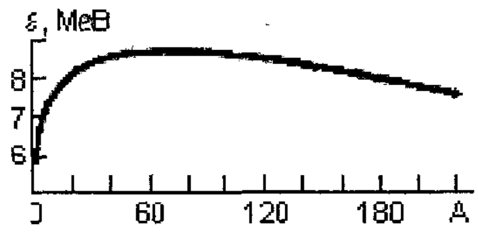

Рис.1. Залежність питомої енергії зв'язку ядер від числа нуклонів

Наприклад, синтез дейтерію і тритію з утворенням гелію і нейтрона

$${}_1^2H + {}_1^3H \rightarrow {}_2^4He + n + 1{,}84MeB,$$

або розпад ядра урану

$$^{235}_{98}U \rightarrow X_1 + X_2 + k \cdot n + \Delta\varepsilon\,,$$

де X_1, X_2 - ядра, що утворюються в результаті розпаду, k – чисельний безрозмірний коефіцієнт від 2 до 3. Елементи X_1 і X_2 - можуть бути різні: стронцій, цирконій, свинець та ін. Всі вони знаходяться в середині періодичної системи елементів. Максимум енергії зв'язку для елементів періодичної системи відповідає приблизно номерам $A \sim 55\text{-}60$, а значить, найбільш стійкими будуть саме ядра із такими значеннями A, тобто найсильніше зв'язані ядра елементів, які в періодичній системі елементів знаходяться поблизу заліза і нікелю. Це означає, що для легких ядер енергетично вигідні реакції синтезу, а для важких - ділення на більш легкі осколки. Атоми з масовим числом $A > 238$ (масивніші за уран ^{238}U) взагалі не можуть тривало існувати і їх отримують лише штучним шляхом. Така нестійкість важких ядер і енергія (атомна енергія), що виділяється при розпаді, а також енергія, яка виділяється при синтезі легких ядер (термоядерна енергія) є доказами справедливості висновків СТВ.

Література

1. Бом Д. Специальная теория относительности. – М.: Мир, 1967. – 285 с.
2. Борн М. Эйнштейновская теория относительности. – М., Мир, 1964. – 456 с.
3. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика. –М., Наука, 1985. – 400 с.
4. Бугаєнко Г.А., Фонкич М.Е. Курс теоретичної фізики. Електродинаміка. Теорія відносності. – Київ., Радянська школа, 1965. – 360 с.
5. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1967. – 460 с.
6. Матвєєв А.И. Электродинамика и теория относительности. – М.: В.Ш., 1964. – 343 с.
7. Мултановский В.В., Васильовський А.С. Курс теоретической физики (классическая электродинамика). – М.: Просвещение, 1990. – 271 с.
8. Мороз І.О., Іваній В.С., Холодов Р.І. Спеціальна теорія відносності. – Суми, видавництво «МакДен», 2011. – 335 с.

Анотація. Мороз І.О., Іваній В.С., Холодов Р.І. Кінематика процесів розпаду та злиття частинок у навчальному курсі СТВ. Розглядаються приклади застосування законів збереження у навчальному курсі СТВ.

Аннотация. Мороз И.А., Иваний В.С., Холодов Р.И. Кинематика процесов распада и слияния частиц в учебном курсе СТО. Рассматриваются примеры применения законов сохранения в учебном курсе СТО.