УДК 514

С.В. Петренко, І.О. Нестеренко
Сумський державний педагогічний університет ім. А.С. Макаренка

АКСІОМАТИЧНИЙ ПІДХІД ДО ВИВЧЕННЯ ШКІЛЬНОГО КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ

Постановка проблеми. Важливим компонентом інтелектуального розвитку учнів є просторове мислення, яке забезпечує орієнтацію в просторі, ефективність засвоєння знань та успіх у оволодінні навичками та вміннями у процесі навчання математики, зокрема, геометрії.

Формуванню просторового мислення учнів сприяє вивчення геометричного матеріалу, але слід зазначити, що матеріал, який розглядається на перших уроках в шкільному курсі геометрії викликає в учнів певні труднощі пізнавального та психологічного характеру. Побудова шкільного курсу геометрії на дедуктивній основі викликає в учнів сьомого класу нерозуміння необхідності логічного обґрунтування тверджень, які «очевидно виконуються» на рисунку. На перших уроках геометрії важливим завданням, яке стоїть перед учителем, є необхідність роз’яснення структури означень геометричних понять, встановлення відношень та властивостей, що приймаються без доведень або таких, що потребують доведення.

Загально відомо, що учні сьомого класу на уроках геометрії не вміють формулювати твердження, які випливають з наведених раніше, з великими труднощами самостійно доводять математичні твердження, і як наслідок, виникають непорозуміння при розв’язуванні геометричних задач.

Вільне оперування просторовими образами є фундаментальним вмінням, завдяки якому об’єднуються різні види навчальної та трудової діяльності. Розвиток в учнів просторових уявлень є істотним компонентом у підготовці до практичної діяльності, особливо це важливо для майбутніх студентів, які вивчатимуть математику чи застосовуватимуть її у майбутній професійній діяльності.

Аналіз актуальних досліджень. Аксіоматичний метод пройшов в своєму історичному розвитку три стадії.

Перша – пов'язана з побудовою геометрії в Давній Греції. У цей час з’являється робота Евкліда «Початки», в якій протягом багатьох років, як вважали вчені, був викладений основний геометричний матеріал. При підготовці змісту шкільних підручників з геометрії тривалий час використовували геометричний матеріал роботи Евкліда.

У Росії перший підручник з геометрії «Генеральна геометрія» був виданий у 1765 році Н.Г. Курчановим, учнем Л.Ф. Магницького. Підручник мав три розділи:

- *лонгіметрія,* в якому розглядались суміжні та вертикальні кути, ознаки паралельності прямих та інше;

- *планіметрія*;

- *стереометрія.*

На початку XIX ст. російські педагоги Е.М. Головін, С.Е. Гур'єв,

Т.Д. Осиповський, Ф.І. Буссе видали ряд підручників з геометрії для гімназій, реальних училищ та інших навчальних закладів. Підручники мали два розділи – *планіметрія та стереометрія.*

З 1864 року особливо популярним вважався підручник «Елементарна геометрія в обсязі гімназичного курсу», підготовлений професором Московського університету А.Ю. Давидовим. Підручник багаторазово перевидавався до 1922 року.

Заслуженою популярністю користувався підручник з геометрії для середньої школи А.П. Кисельова, виданий вперше в кінці XIX століття. У школах України геометрію тривалий час вивчали за цим підручником [7].

Структуру підручника А.П. Кисельова.

У вступі до планіметрії були сформульовані *основні властивості площини* і *прямої,* які пізніше назвали аксіомами та наведені три аксіоми з «Початків» Евкліда. Доведення всіх планіметричних тверджень в подальшому проводилось без посилання на ці аксіоми (використовувався метод накладання).

У розділі стереометрії були сформульовані три властивості площини, названі аксіомами, які частково використовувались при доведенні теорем. Слід зазначити, що про систему аксіом та аксіоматичний метод у підручнику А.П. Кисельова мова не йшла.

Професор Н.Д. Глаголєв в додатках до стереометрії А.П. Кисельова «Про аксіоми геометрії» виклав суть аксіоматичного методу побудови геометрії, короткий зміст «Початків» Евкліда і систему аксіом Д. Гільберта.

У 70-ті роки минулого століття в школах України (як і в інших республіках СРСР) планіметрію вивчали за навчальним посібником, підготовленим авторським колективом під керівництвом академіка А.М. Колмогорова [3].

Структура навчального посібника А.М.Колмогорова.

Матеріал розділу 1. «Початкові поняття геометрії», присвячений основним поняттям: *точка, відрізок, фігура (точка і відрізок – види фігури);*

та відношенням між ними: *точка належить фігурі, точка є кінцем відрізка, два відрізки рівні.* У даному розділі вводяться поняття *відстані* між двома точками та формулюються три *основні властивості відстані,* які використовуються для доведення твердження:

- *для будь-яких трьох точок A, B і C відстань AC більша або дорівнює різниці відстаней AB і BC.*

У даному пункті вводиться поняття *аксіоми,* формулюється *аксіома прямої,* на основі якої доводиться теорема:

дві прямі можуть мати не більше однієї спільної точки.

Далі формулюються твердження, одні з яких не доводяться, інші доводяться, але термін «аксіома» не вживається, лише сформульована аксіома *паралельності* і доведено ряд тверджень [4].

Систему аксіом, на якій би будувалась планіметрія, не сформульовано, таким чином аксіоматичний метод не реалізовано.

У додатках професор Н.Д. Глаголєв запропонував одну із можливих систем аксіом, яка відповідала системі викладу геометричного матеріалу в даному посібнику.

Система аксіом складалася з дванадцяти аксіом, поділених на п'ять груп:

1) аксіоми належності (3 аксіоми);
2) аксіоми відстані (3 аксіоми);
3) аксіоми порядку (4 аксіоми);
4) аксіома рухомості (1 аксіома);
5) аксіома паралельних (1 аксіома).

У 80-і роки минулого століття було декілька спроб побудувати шкільний курс геометрії на аксіоматичній основі. Найбільш популярним став підручник О.В. Погорєлова [5] та підручник Л.С. Атанасяна.

Друга хвиля в історії аксіоматичного методу пов'язана з відкриттям

М.І. Лобачевським, Я. Бойяи і К.Ф. Гаусом можливості побудувати несуперечливу систему аксіом, виходячи з системи аксіом, відмінної від евклідової. Це відкриття зруйнувало переконання в абсолютній істинності аксіом і наукових теорій, побудованих на них. У цей період з'явилося багато різних геометричних, арифметичних і алгебраїчних теорій, які будувалися на основі аксіоматичного методу (роботи Р. Дедекінда, Р. Грасмана та інших). Ця хвиля розвитку аксіоматичного методу завершилася створенням аксіоматичних систем арифметики (Дж. Пеано, 1891), геометрії (Д. Гільберт, 1899), числення висловів і предикатів (А. Н. Уайтхед і Б. Рассел, Англія, 1910) та інших [8].

Аксіоматика Д.Гільберта дозволила Ф. Клейну і А. Пуанкаре довести несуперечність геометрії М. І. Лобачевського відносно евклідової геометрії за допомогою вказівки інтерпретації понять і пропозицій неевклідової геометрії в термінах геометрії Евкліда, тобто, побудувати моделі. Послідовники цієї ідеї точно описали логічні засоби виведення теорем з аксіом, тим самим підійшли до концепції формального аксіоматичного методу, який є характерним для третьої, сучасної хвилі.

У 1982-1983 навчальному році у школах України (та інших республік СРСР), починаючи з 6 класу, геометрію розпочали вивчати за навчальним підручником академіка О.В. Погорєлова. Основний зміст цього підручника був опублікований у 1972 році в книзі «Елементарна геометрія», яка була підготовлена на конкурс шкільного підручника з геометрії. У результаті експерименту (1977-1982 роки), який проводився у школах Харківської області, міст Києва і Севастополя за посібником О.В. Погорєлова, підручник «Геометрія. 6-10 класи» був удосконалений і введений у навчальний процес з 1982 року.

Міністерство освіти СРСР і Міністерство освіти УРСР рекомендували викладання геометрії здійснювати у середній школі за цим підручником, як основним.

Головне завдання викладання геометрії в школі автор підручника визначив так: «Пропонуючи цей курс, ми виходили з того, що головне завдання викладання геометрії в школі – навчити учнів логічно міркувати, аргументувати свої твердження, доводити. Дуже небагато з тих, що закінчать школу, будуть математиками, тим більше геометрами. Будуть і такі, що у своїй практичній діяльності жодного разу не використають теорему Піфагора. Проте навряд чи знайдеться хоч би один, якому не доведеться міркувати, аналізувати, доводити».

До науково-педагогічних особливостей навчального підручника О.В.Погорєлова можна віднести:

1) традиційний зміст і аксіоматична побудова;

2) економний виклад матеріалу і організуюча роль запитань для повторення;

3) єдність теорії і практики.

Відносно традиційного змісту О.В. Погорєлов зауважив: «Увесь багатовіковий досвід викладання елементарної геометрії з часів Евкліда доводить раціональність традиційної системи. Удосконалення, пов’язане із загальним розвитком науки, не повинне стосуватися її розумних і глибоко продуманих основ».

Мета статті полягає у вивченні особливостей побудови шкільних підручників на аксіоматичній основі та обґрунтування необхідності формування вчителем математики в учнів уявлень про аксіоматичний метод в процесі навчання геометрії.

Виклад основного матеріалу. Дедуктивна побудова геометрії визначається її аксіоматикою. Взагалі не слід змішувати аксіоматичну побудову шкільного курсу геометрії з аксіоматичною побудовою геометрії як науки. Спроби авторів ототожнювати їх при написанні шкільних підручників приводили до невдач. Наприклад, досить популярна система аксіом Гільберта для побудови шкільної геометрії не підходить. Для дедуктивної побудови шкільного курсу геометрії необхідно мати просту, природну, зрозумілу для учнів систему аксіом. Цим вимогам найбільше відповідала система аксіом О.В. Погорєлова. В його підручнику [5] було здійснено систематизований виклад геометричного матеріалу на базі оригінальної і економної системи аксіом. При цьому аксіоматичний виклад розпочинався від початку курсу. Автор вважав, що з педагогічної точки зору необхідно як можна раніше виховати в учнів мотивовану потребу аргументувати свої міркування, доводити нові твердження.

Курс геометрії в підручнику О.В. Погорєлова «Геометрія 7-11» [6] був побудований строго дедуктивно: усі аксіоми у вигляді основних властивостей найпростіших геометричних фігур сформульовані в першому параграфі, в якому закладені основи курсу геометрії.

Основними поняттями є *точка, пряма, площина,* а основними відношеннями є: «*належати*» для точок і прямих, «*лежати між*» для точок на прямій, міра (довжина відрізка, градусна міра кута).

Формулювання аксіом планіметрії і їх кількість у різних виданнях навчального посібника дещо змінювались, уточнювались. Наприклад, за підручником [5] система аксіом складається з дев'яти аксіом планіметрії і трьох аксіом стереометрії. З методичних міркувань і для зручності викладу матеріалу аксіоми стереометрії формулювалися на початку стереометрії, аксіоми не розбиті на групи, а мають порядкові номери.

Залежно від потреби вводилися означувані поняття: *відрізок, промінь (півпряма), кут, розгорнутий кут, трикутник, рівні відрізки, рівні кути, рівні трикутники, паралельні прямі* та інші.

Слід зазначити, що у формулюванні аксіом відсутнє слово «площина», оскільки вони формулювалися для планіметрії, де всі об’єкти геометрії розміщені в площині.

У стереометрії нескінченно багато площин, тому при формулюванні аксіом стереометрії необхідно в кожній з них підкреслювати, що названі об’єкти лежать в одній площині.

У багатьох підручниках з планіметрії для середньої школи період введення системи аксіом розтягувався до закінчення вивчення планіметрії. Пропонувалось спочатку вивчати геометрію на рівні наочних уявлень та інтуїтивно зрозумілих висновків без логічного їх обґрунтування, накопичуючи певні суттєві геометричні відомості, а після завершення вивчення планіметрії перейти до аксіоматичного викладу матеріалу, тобто спочатку основний зміст планіметрії вивчався емпірично. Слід зазначити, що при цьому не виконувалось основне завдання – не формувалось наукове, дедуктивне мислення учнів.

На відміну від такого погляду на побудову і вивчення систематичного курсу геометрії, починаючи з планіметрії, у підручнику О.В. Погорєлова [5] враховувалися вікові особливості учнів 7-9 класів і використовувалися наочні та інтуїтивні прийоми, які поєднувалися зі строго науковим, дедуктивним викладом (і вивченням) геометричного матеріалу уже з перших уроків геометрії в 7 класі. При цьому ставилося завдання не заучувати доведення, а поступового оволодівати ними; а також доводити всі твердження, які не входили у число основних властивостей найпростіших геометричних фігур. Саме з урахуванням цього спочатку поняття аксіоми не вживається, воно замінене більш зрозумілим поняттям «основні властивості», які емпірично відомі учням з програми математики 1- 6 класів. Лише в кінці § 1 (п. 13) читаємо: «Твердження, які містять формулювання основних властивостей найпростіших фігур, не доводяться і називаються *аксіомами.* Слово «аксіома» походить від грецького слова *аксіос* і означає «твердження, що не викликає сумнівів»».

Під час доведення теорем дозволяється користуватися основними властивостями найпростіших фігур, тобто аксіомами, а також уже доведеними властивостями, тобто *теоремами.* Ніякими іншими властивостями фігур, навіть якщо вони нам видаються очевидними, користуватись не можна.

При доведенні теорем можна користуватися рисунком, як геометричним записом того, що виражається словами. Під час міркувань не дозволяється використовувати властивості фігур, які видно з рисунка, якщо не можна обґрунтувати їх, спираючись на аксіоми і теореми, доведені раніше.

Вибрана О.В. Погорєловим система аксіом шкільного курсу геометрії надала можливість досягти досить високого рівня доведення тверджень, а логічна послідовність викладення матеріалу і знайдені автором нові математичні підходи до викладення складних розділів дозволили значно скоротити зміст і обсяг підручника.

Метрична система аксіом О.В. Погорєлова дозволяла уже з 8-го класу ефективно використовувати при доведенні геометричних тверджень координатний метод і цим самим зменшити обсяг матеріалу, а також створити умови для здійснення внутрішньо предметних зв'язків геометрії та алгебри. Традиційний зміст і аксіоматична побудова геометрії в підручнику О.В. Погорєлова, його внутрішньо предметні зв'язки і орієнтація на учнів – усе це дає можливість розвивати в учнів логічне мислення.

На початку XXI століття з’являються нові, сучасні підручники з геометрії, які відповідають сучасності.

Структура сучасного підручника з геометрії авторів М.І. Бурда, Н.А.Тарасенкова [2].

У даному підручнику основними фігурами є *точка* і *пряма*, а основними відношеннями – «*належати*», «*лежати між*», «*накладання»*, які вводяться без означень. Використовуючи ці поняття, даються означення іншим фігурам (*променю, відрізку, куту* тощо) та відношенням (*рівності, подібності, паралельності* тощо). Розглядається 10 аксіом планіметрії.

У стереометрії вивчають властивості фігур у просторі. Для цього, як і в планіметрії, використовують аксіоматичний метод. Спочатку обирають основні поняття, основні фігури та основні відношення, які пояснюють через приклади, не даючи означень. Без доведення приймають вихідні істинні твердження – аксіоми. Основними фігурами є *точка, пряма і площина*. Вводяться 4 аксіоми та розглядаються з них три наслідки [2].

Перед творчим учителем завжди стоїть важлива задача формування в учнів бездоганних знань, навичок та вмінь відповідно до основних фактів шкільного курсу математики, зокрема геометрії, а також глибокого розуміння суті аксіоматичного методу, як одного з найпотужніших наукових методів пізнання.

Відомо, що для побудови шкільного курсу планіметрії можна взяти різні системи аксіом, тоді побудова планіметрії буде здійснюватися різними шляхами. Слід зазначити, що незалежно від підходу до побудови планіметрії, у даному курсі будуть вивчатися одні й ті ж геометричні фігури та їх властивості.

Як відомо, в геометрії початкові відомості, які є наглядні і очевидні, беруть з практичних задач та спостережень. Усі подальші твердження обґрунтовуються шляхом логічних міркувань. Так діють при доведенні теорем та розв'язуванні задач. Прикладом може бути означення многокутника: «*многокутник – частина площини, обмежена простою лінією*». Виникає питання: «Що означає обмежена?» Означення не існує, вчитель при поясненні спирається на очевидність. Щоб дати означення, необхідно одне поняття пояснити за допомогою інших, які вважаються вже відомими.

Учням слід усвідомити, що при вивченні геометрії важливо встановити основні поняття, які вводяться без означення, а всі інші можна визначити через них. Таким чином, приходять до елементарних понять, які не можна визначити через інші. Ці поняття і називаються *основними*.

Основні поняття, які виділяють при побудові геометрії можна поділити на два види:

1) одні позначають об'єкти, якими займається геометрія;
2) інші позначають відношення між об'єктами.

Наприклад, точка і відрізок – об'єкти, а те, що точка належить відрізку – відношення між ними.

У геометрії доведення тверджень чи теорем, спираються на передумови, які визнаються вже доведеними. Однак потрібно пам'ятати, що ці передумови теж доводилися і їх потрібно було обґрунтувати. У результаті обґрунтування приходимо до тверджень, які не потрібно доводити і приймаємо їх без доведення. Ці твердження називаються *аксіомами*. Набір аксіом повинен бути таким, щоб, спираючись на нього, можна було довести подальші твердження. За таким принципом побудовано шкільні підручники з геометрії.

Побудова шкільного курсу геометрії полягає в наступному:

1) виділяються основні поняття;
2) формулюються аксіоми теорії;
3) всі інші твердження виводяться логічним шляхом, спираючись на основні поняття та аксіоми.

Геометричні поняття є абстрактними, тому їх властивості можна сформулювати цілком точно, без жодної двозначності. Наприклад, «*через будь-які дві відмінні одна від одної точки проходить одна і тільки одна пряма*». За даними авторів [5] у креслярській практиці через дві дані точки досить упевнено можна провести пряму і тільки одну тоді, коли ці точки розміщені не дуже близько одна від одної.

У геометрії твердження, які пропонують автори шкільних підручників логічно пов'язані між собою. Деякі з них можна вивести з інших, не спираючись на властивості фігур, а скористатися досвідом. Наприклад, з тверджень «*Діагоналі прямокутника рівні*» і «*Квадрат є прямокутник*», випливає твердження «*Діагоналі квадрата рівні*». Дане твердження можна логічно довести на основі перших двох тверджень, не використовуючи при цьому «наочно очевидні» властивості фігур, що розглядаються.

Важливо пам’ятати, що дати єдине визначення основних понять для всієї геометрії не можна, тому основні поняття геометрії слід визначати як об'єкти будь-якої природи, що задовольняють аксіомам даної геометрії.

При аксіоматичній побудові геометричної системи автори шкільних підручників підходять до їх побудови з позицій деякої системи аксіом, або аксіоматики. У цих аксіомах описуються властивості основних понять геометричної системи, і тоді можна представляти основні поняття у вигляді об'єктів будь-якої природи, які мають властивостяі, які вказані в аксіомах. Такий спосіб побудови теорії називається аксіоматичним методом, а побудований шкільний підручник, як підручник побудований на аксіоматичній основі.

Усі шкільні підручники з геометрії, мають різні підходи до вивчення геометричних фактів. Це пов’язано з тим, що за основні поняття можна приймати різні поняття, а за аксіоми – різні твердження.

Враховуючи вище сказане, слід пам’ятати, що під час вивчення математики, зокрема геометрії, вчитель повинен проводити цілеспрямовану роботу, яка направлена на формування в учнів таких важливих якостей:

- добре розвинуті просторові уявлення та уява;
- вміння бачити в реальних ситуаціях ілюстрації теоретичних положень, що вивчаються;
- наводити приклади їх реалізації на предметах навколишнього середовища;
- глибоке розуміння суті аксіоматичного методу, як одного з найпотужніших наукових методів пізнання [6].

Досягнення вчителем мети щодо формування згаданих якостей забезпечить просторове бачення об’єкта, полегшить і прискорить осмислення сприймання та закріплення матеріалу, навчить учнів читати графічні зображення, висловлювати думки в графічній формі, сприятиме успішному розв’язанню задач.

Висновки. Аксіоматичний метод відіграє особливу роль в математиці. Предметом досліджень є безліч математичних структур, а дослідження цих структур відбувається на основі аксіоматичного методу.

Розвиток наук в XX столітті показав, що математика виділяється в системі наук як єдина, що використовує аксіоматичний метод надзвичайно широко, і що цей метод значною мірою зумовлює вражаючу ефективність математики в процесі пізнання навколишнього світу.

Побудова шкільного підручника на аксіоматичній основі ставить перед вчителем математики важливе завдання – досконало володіти матеріалом, який подається в підручнику, враховувати методичні особливості матеріалу та створювати умови для ефективного засвоєння його та застосування при розв’язуванні задач на уроках геометрії.

Питання, яке розглядається має важливе значення, оскільки якісне засвоєння матеріалу перших тем шкільного курсу геометрії сприятиме високому рівню знань з геометрії.

Література

1. Александров А.Д. Основания геометрии / Александров А.Д. – М.: Наука, 1987. – 288 с.
2. Бурда М.І. Геометрія 10 клас / М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. – К.: Зодіак – ЕКО, 2010. – 174 с.
3. Колмогоров А.М., Семенович О.Ф., Черкасов Р.С.. Геометрія: Навчальний посібник для 6-8 класів середньої школи. – К.: Рад. школа, 1973.
4. Колмогоров А.Н. Геометрия / Колмогоров А.Н., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С. – М.: Просвещение, 1980. – 382 с.
5. Погорєлов А.В. Геометрія 7-11 клас / Погорєлов А.В. – К.: Радянська школа, 1991.– 352 с.
6. Семенович О.Ф. Геометрія. Аксіоматичний метод / Семенович О.Ф. – Київ: Радянська школа, 1976. – 165 с.
7. Энциклопедия элементарной математики: Книга пятая: Геометрия. – М.: Наука, 1966. – 624 с.
8. Энциклопедия элементарной математики: Книга четвёртая: Геометрия. – М.: Наука, 1963. – 568 с.

Анотація. *Петренко С.В., Нестеренко І.О. Аксіоматичний підхід до вивчення шкільного курсу геометрії. У статті подано аналіз особливостей побудови шкільних підручників на аксіоматичній основі та обґрунтування необхідності формування вчителем математики в учнів уявлень про аксіоматичний метод в процесі навчання геометрії.*

Ключові слова: *геометрія, аксіома, аксіоматичний метод*

Аннотация. *Петренко С.В., Нестеренко И.А. Аксиоматический подход к изучению школьной геометрии. В статье подан анализ особенностей школьных учебников на аксиоматической основе и обобщение необходимости формирования учителем математики в учащихся представлений о аксиоматическом методе в процессе обучения геометрии.*

Ключевые слова. *геометрия, аксиома, аксиоматический метод*

Summary. *Petrenko S., Nesterenko I. The axiomatic approach to the study of school geometry. The offered analysis of the characteristics of school textbooks in the axiomatic basis of generalization and the need to form a math teacher in the students' understanding of the axiomatic method in teaching geometry.*

Key words: *geometry, axiom, axiomatic method.*