

СТАТИСТИКА БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНА В КУРСЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ БУДУЩЕГО УЧИТЕЛЯ ФИЗИКИ

*Сумский государственный педагогический университет имени А.С.Макаренко
Сумы, Роменская 87,40002*

Рассматривается методика изложения темы «Статистика Бозе-Эйнштейна» в курсе теоретической физики в системе подготовки учителя физики.

Ключевые слова: бозе-газы, спин, законы теплового излучения, сверхтекучесть, бозе-конденсация.

Формирование современного научного мировоззрения будущего учителя физики в значительной степени зависит от понимания и усвоения основных идей и теорий квантовой физики, истоки которой связаны с именем немецкого физика М. Планка. В начале XX века в развитии классической физики возникло несколько непреодолимых противоречий теоретических и экспериментальных исследований.

Анализ этих противоречий свидетельствует о том, что отличия в состояниях и свойствах термодинамических систем связаны не только с классическими отличиями (масса, заряд и тому подобное) атомов и молекул или других элементарных частиц, из которых они состоят, но и с более тонкими их отличиями, выходящими за рамки классической физики. Следовательно, для решения противоречий, связанных с тепловым излучением (и с некоторыми другими опытными фактами, которые не рассматриваются в данной статье), возникает задача об учете этих «неклассических» свойств частиц. Ими являются наличие спина и его величина. Дело в том, что, как известно из квантовой механики, частицы с полуцелым спином (они получили название – фермионы) подчиняются принципу Паули о невозможности нахождения в одном и том же квантовом состоянии, а ко всем другим частицам (бозоны)

принцип Паули не применяется. Следует также различать молекулярные бозоны и бозоны с нулевой массой покоя (фотоны). Кроме этого, с позиций квантовой физики все частицы одного сорта являются абсолютно тождественными. Классические же частицы вовсе не имеют спина и их физически можно различить. Поэтому, при описании вероятности состояния термодинамических систем, необходимо учитывать указанные квантовые отличия частиц. Таким образом, перед методической наукой стоит задача – на основе анализа существующих методик, совершенствуя их, построить достаточно наглядную и понятную методику и технологию изучения истока квантовой теории, которая бы при этом отвечала уровню базовой науки. В данной статье предлагается к рассмотрению авторское видение изложения будущим учителям физики статистики Бозе-Эйнштейна, основанное на анализе научно-методической литературы и собственного опыта.

Теоретическому анализу законов теплового излучения и методике их изучения посвящено, по-видимому, наибольшее количество публикаций. Но, как показывает их анализ, в научной и учебно-методической литературе [1-3] решения вопроса о распределении энергии в спектре абсолютно черного тела обычно связывают исключительно с М. Планком. Он, как известно, ввел гипотезу о распространении света в виде квантов и действительно получил закон распределения энергии в спектре абсолютно черного тела, который позволяет теоретически получить все законы теплового излучения. Но несложный анализ показывает, что объяснение Планком распределения энергии в спектре абсолютно черного тела приводит к новому противоречию, которое невозможно объяснить в рамках квазиклассической теории Планка. Противоречие, о котором идет речь, осталось вне поля зрения учебно-методической литературы и это создает условия для неправильного понимания студентами вопроса о теории теплового излучения. Указанное противоречие нами детально проанализировано в статье [4] и сводится к тому, что последовательно развивая предложенную М. Планком гипотезу, равновесное тепловое излучение нужно рассматривать как систему частиц, которые не

взаимодействуют между собой и хаотически двигаются. Поэтому такую систему можно считать классической и применять для нее, например, распределение Максвелла-Больцмана. Тогда, в соответствии с распределением Максвелла-Больцмана, количество фотонов, импульс которых лежит в интервале от p до $p+dp$, должно равняться: $dn(v) = const \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}} p^2 dp$. Для фотонов $\varepsilon = h\nu$, $p = \frac{h\nu}{c}$. Подставляя эти формулы в предыдущее выражение,

получим число фотонов в интервале частот от ν до $\nu+d\nu$:
 $dn(v) = const \cdot e^{-\frac{h\nu}{\theta}} \nu^2 d\nu$. Тогда энергия излучения в данном интервале частот

будет, очевидно, равной: $dE(v, \theta) = h\nu \cdot dn(v) = const \cdot \nu^3 \cdot e^{-\frac{h\nu}{\theta}} d\nu$. Отсюда находим выражение для распределения энергии в спектре абсолютно черного тела:

$$\rho_{\nu, T} = \frac{dE(v, \theta)}{d\nu} = h\nu \cdot dn(v) = const \cdot \nu^3 \cdot e^{-\frac{h\nu}{\theta}},$$

которое совпадает с известной (но неверной) формулой Вина и только в области больших частот совпадает с экспериментом. Она в этой части спектра частот является следствием правильной формулы Планка, которая описывает распределение энергии во всем спектре излучения абсолютно черного тела. Поэтому решение М. Планком проблемы «ультрафиолетовой катастрофы» нельзя рассматривать как завершающий этап в изучении теплового излучения. Здесь нужны более радикальные отходы от классических позиций [5,6].

К началу изучения квантовых газов студенты уже знают основы метода Гиббса и умеют им пользоваться, например, для изучения классических идеальных и реальных газов. Поэтому воспользуемся большим каноническим распределением Гиббса, определяющим вероятность состояния квантовой системы с энергией $E_i = n\varepsilon_i$ и количеством частиц n , которая может обмениваться частицами и энергией с окружающей средой

$$\omega = \left(e^{\frac{\mu - E_i}{\theta}} g_i(E_i, n) \right) \cdot \left(\sum_{i,n} e^{\frac{\mu - E_i}{\theta}} g_i(E_i, n) \right)^{-1}, \quad (I)$$

где μ – химический потенциал, θ – статистическая температура, g – кратность вырождения, и вычислим среднее количество частиц на некотором энергетическом уровне ε_i :

$$\langle n \rangle = \left(\sum_{i,n} n \cdot e^{\frac{\mu - E_i}{\theta}} \cdot g_i(\varepsilon_i, n) \right) \left(\sum_{i,n} e^{\frac{\mu - E_i}{\theta}} g_i(\varepsilon_i, n) \right)^{-1}. \quad (II)$$

Подставляя в это выражение значение энергии системы $E_i = n\varepsilon_i$, мы автоматически учитываем суммирование по i . Выражение (II) может быть записано в виде:

$$\langle n \rangle = \theta \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_n e^{\frac{\mu - \varepsilon_i n}{\theta}} \cdot g(n). \quad (III)$$

Для определения кратности вырождения необходимо фазовый объем, который соответствует выбранной подсистеме (он равен h^3 , поскольку система содержит один квантовый уровень) разделить на фазовый объем, который приходится на один квантовый уровень (он также равен h^3), тогда в (III) $g(\varepsilon_i) = 1$. Следовательно, среднее число тождественных частиц, какими являются фотоны, на i -том энергетическом уровне будет равно:

$$\langle n \rangle = \theta \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_{n=0}^N e^{\left(\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta}\right)n}. \quad (IV)$$

В этом выражении суммирование выполняется по количеству всех частиц системы, которые могут находиться на i -том уровне. В случае частиц, которые не подчиняются принципу Паули, верхний предел может быть заменен на (∞) , поскольку при $n > N$ члены ряда в (IV) будут бесконечно малыми (при условии $\mu < 0$). Тогда: $\langle n \rangle = \theta \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{\left(\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta}\right)n}$. Здесь ряд $\sum_{n=0}^{\infty} e^{\left(\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta}\right)n}$ является бесконечно

убывающей геометрической прогрессией со знаменателем $q = e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta}}$, сумма которой, как известно из математики, определяется следующим выражением:

$\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta} n} = \frac{1}{1 - q}$. Таким образом, среднее число тождественных частиц, которые

не подчиняются принципу Паули (световые кванты, атомы и молекулы, которые имеют в своем составе парное число элементарных частиц), и находятся на энергетическом уровне ε_i , равно:

$$n = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{\theta}} - 1} \quad (V)$$

Это выражение называется распределением Бозе-Эйнштейна.

В макроскопических системах уровни энергии расположены достаточно густо (квазинепрерывно), и мы можем определять не количество частиц, которые находятся на некотором конкретно выбранном энергетическом уровне, а количество частиц, которые имеют энергию от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$. Очевидно, что для нахождения среднего числа частиц с энергией от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$ необходимо среднее число частиц на одном уровне (V) умножить на количество уровней $\frac{d\Gamma}{h^3}$, где $d\Gamma$ – фазовый объем, который отвечает состояниям с энергией от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$. Тогда количество частиц, которые находятся на уровнях указанных энергий определится выражением:

$$dn = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{\theta}} - 1} \cdot \frac{d\Gamma}{h^3}. \quad (VI)$$

Применим это выражение для изучения молекулярных бозе-газов и для получения эмпирических законов излучения абсолютно черного тела.

Пусть молекулярный бозонный газ находится в условиях, при которых наступает вырождение. В этом случае его нужно описывать распределением Бозе-Эйнштейна. Фазовый объем, который отвечает интервалу энергии от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$, равен: $d\Gamma = d\Gamma_p \cdot d\Gamma_q = 4\pi p^2 dp \cdot dV$ Поскольку $p = \sqrt{2m\varepsilon}$ и $dp = \sqrt{\frac{2m}{\varepsilon}} d\varepsilon$, то количество молекулярных бозонов в объеме V в упомянутом интервале энергии будет равно: $dn = 4\pi(2m)^{\frac{3}{2}} V \left(e^{\frac{\varepsilon - \mu}{\theta}} - 1 \right)^{-1} h^{-3} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon$ Общее количество частиц бозе-газа в объеме V можно определить, если проинтегрировать предыдущее выражение:

$$N = \frac{4\pi(2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} V \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{\theta}} - 1} d\varepsilon. \quad (\text{VII})$$

Из выражения (VII) видно, что для молекулярного бозонного газа $\mu \leq 0$, иначе при $\varepsilon = \mu$ интеграл в (VII) расходится.

При уменьшении температуры знаменатель в степени экспоненты в (VII) уменьшится. Для того, чтобы общее количество частиц осталось неизменным, необходимо, чтобы при снижении температуры химический потенциал возрастал, то есть производная $\frac{d\mu}{dT} < 0$. Это можно доказать и аналитически [7].

Очевидно, что при некоторой температуре T_0 химический потенциал возрастет до нуля и больше расти не сможет, потому что нарушится условие нормирования (VII). Поэтому график зависимости химического потенциала молекулярного бозе-газа от температуры схематически можно представить в виде, изображенном на рис. 1. Конкретный вид графика $\mu = \mu(T)$ нам неизвестен, но он должен удовлетворять условию: $\frac{d\mu}{dT} < 0$.

При $T < T_0$ формула (VII) определяет не общее количество частиц N , а число всех частиц с энергией $\varepsilon > 0$. В этом случае, очевидно, нужно писать:

$$N' = \frac{4\pi(2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} V \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{e^{\frac{\varepsilon}{\theta}} - 1} d\varepsilon \quad (\text{VIII})$$

Причем $N' < N$. Этот интеграл, сделав замену $x = \frac{\varepsilon}{kT}$, приведем к виду:

$$N' = \frac{4\pi(2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} V (kT)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} dx$$

Воспользуемся тем, что $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$. Тогда получим:

$$N' = \frac{2\pi^3(2m)^{\frac{3}{2}}}{3h^3} V (kT)^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{IX})$$

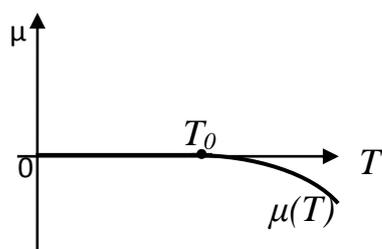


Рис. 1. Схематическая зависимость химического потенциала молекулярных бозонов от температуры

Таким образом, при понижении температуры бозе-газа количество частиц с энергией $\varepsilon > 0$ уменьшается пропорционально $T^{\frac{3}{2}}$, а количество частиц $(N - N')$ оседает на нулевом уровне энергии и эти частицы не участвуют в тепловом движении. При $T = 0$ все бозе-частицы будут находиться на нулевом уровне. Процесс перехода частиц на нулевой уровень получил название – конденсация бозе-газа. Здесь под конденсацией понимается не переход вещества из газообразного состояния в жидкий, а переход частиц на нулевой уровень энергии, то есть выбывание их из теплового движения. Температуру конденсации бозе-газа, то есть температуру T_0 (рис. 1) перехода его частиц на нулевой уровень можно найти из (IX), положив $N = N'$:

$$T_0 = \text{const} \frac{1}{m} \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (\text{X})$$

Поскольку температура конденсации выражается через массу бозе-частиц и их концентрацию, то понятно, что выражение (X) отображает индивидуальные свойства системы.

Расчет температуры бозе-конденсации T_0 для конкретных систем показывает, что она значительно ниже, чем температура действительной конденсации газа. Поэтому экспериментально в газовой фазе нельзя наблюдать конденсацию бозе-частиц. При температуре $T < T_0$ энергия молекулярного бозе-газа определяется частицами с энергией $\varepsilon > 0$, т.е. выражением $E = \int \varepsilon dn$, записанным для случая $\mu = 0$:

$$E = \int_{p,q} \varepsilon \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{\theta}} + b} \cdot \frac{d\Gamma}{h^3} = \frac{4\pi(2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} V \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{\varepsilon}{\theta}} - 1} d\varepsilon \quad (\text{XI})$$

Определенный интеграл в (XI) – это некоторое число, поэтому энергию бозе-газа, который находится в единице объема, можно записать в виде:

$$E = \text{const} (m)^{\frac{2}{3}} (T)^{\frac{5}{2}}. \quad (\text{XII})$$

Отсюда находим теплоемкость, энтропию, свободную энергию и давление молекулярного бозе-газа:

$$c = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = \frac{5E}{2T} \sim T^{\frac{3}{2}}, \quad S = \int_0^T \frac{dQ}{T} = \int_0^T \frac{c_V dT}{T} = \frac{5E}{3T},$$

$$F = E - TS = -\frac{2}{3}E, \quad p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = \text{const} (m)^{\frac{2}{3}} T^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{XIII})$$

В точке $T=T_0$ все рассмотренные физические величины непрерывные, но можно показать [5], что производная от теплоемкости по температуре в этой точке имеет разрыв. Поэтому точка бозе-конденсации фактически является точкой некоторого фазового перехода.

В течение многих лет явление бозе-конденсации в газах оставалось сугубо теоретическим результатом, хотя важность этого явления учеными осознавалась. В 1937 г. П. Л. Капица, исследуя свойства жидкого гелия He_2^4 при низких температурах, сделал фундаментальное открытие – сверхтекучесть гелия, которое является качественным подтверждением возможности конденсации бозе-частиц. Известно, что атомы гелия He_2^4 имеют целый спин, то есть являются бозонами. При температуре $4,2K$ гелий превращается в жидкость, а при $2,18K$ жидкий гелий состоит из двух компонент: нормальной и сверхтекучей. В нормальной компоненте частицы еще не находятся на нулевом уровне и участвуют в тепловом движении. Вследствие этого нормальная компонента имеет внутреннее трение и теплоемкость. В сверхтекучей компоненте частицы находятся на нулевом уровне, а энергия теплового движения недостаточна для того, чтобы их перевести на другие уровни, на которых бы они участвовали в тепловом движении.

Хотя теория жидкого состояния отличается от теории газов, однако, причина двухфазного состояния жидкого гелия качественно объясняется "газовой" моделью бозе-конденсированного гелия. Этот вывод подтверждается также тем, что атомы изотопа гелия He_2^3 , которые имеют полуцелый спин и не подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна, при температуре $2,18K$ не переходят в сверхтекучее состояние. Но эксперименты с жидким гелием He_2^3 при очень низких температурах показали, что в нем тоже появляется сверхтекучая компонента, которая свидетельствует о бозе-конденсации. Это можно объяснить тем, что при очень низких температурах атомы гелия He_2^3 объединяются в пары, аналогичные куперовским парам электронов в сверхпроводниках, и образованные частицы становятся бозонами.

Полученный вывод о существовании бозе-конденсации играет важную роль в объяснении механизма сверхпроводимости металлов и сверхтекучести гелия. Отметим также, что в последние десятилетия производились опыты с другими газами очень малой плотности, которые вследствие этого даже при температурах 10^{-4} - $10^{-7}K$ не переходили в жидкое состояние, и в них тоже наблюдалась бозе-конденсация [8,9].

В отличие от молекулярных или атомарных систем бозе-газа, системы фотонного газа не могут иметь произвольного количества частиц. Если, например, фотонный газ существует в некоторой полости, то при уменьшении объема при постоянной температуре стенки полости будут больше фотонов поглощать, чем излучать и при уменьшении объема до нуля все фотоны поглотятся. Поэтому в состоянии равновесия фотонного газа при заданном объеме и температуре в нем может быть лишь вполне определенное количество частиц (фотонов), то есть для такой системы независимыми параметрами, характеризующими ее состояние, будут V, T, N . Как известно, при таких независимых параметрах свойствами характеристических функций обладает свободная энергия F , которая в состоянии равновесия имеет минимальное

значение. Поэтому при условии $T = const$ и $V = const$, $\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{v,T} = 0$, но $\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{v,T} = \mu$.

Следовательно, химический потенциал фотонного газа равен нулю. Этот вывод вытекает также из непосредственного расчета термодинамического потенциала Гиббса, который мы обычно выполняем при анализе термодинамики теплового излучения.

Воспользуемся также тем, что фазовый объем частиц может быть записан в известном студентам виде ($d\Gamma = 4\pi p^2 dp \cdot dV$), а импульс фотона связан с его энергией $p = \frac{h\nu}{c}$, тогда $d\Gamma = 4\pi \frac{h^3}{c^3} \nu^2 d\nu \cdot dV$. Подставив данное выражение в (VI), перейдем от распределения по энергии к распределению по частоте, то есть получим количество фотонов с частотой от ν до $\nu + d\nu$. Учтем при этом, что фотоны, как электромагнитные волны, могут иметь две взаимно перпендикулярных поляризации или, что то же, что спин фотонов может иметь две ориентации. Тогда имеем:

$$dn = 8\pi \nu^2 c^{-3} \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)^{-1} d\nu \cdot dV. \quad (XIV)$$

Энергия электромагнитного излучения в упомянутом интервале частот при заданной температуре в объеме V будет равна:

$$dE(\nu, T) = h\nu \cdot dn = 8\pi h\nu^3 c^{-3} V \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)^{-1} d\nu, \quad (XV)$$

а спектральная плотность энергии $\varepsilon_{(\nu, T)} = \frac{dE(\nu, T)}{V d\nu}$, которая характеризует распределение энергии в спектре абсолютно черного тела определится выражением:

$$\varepsilon_{(\nu, T)} = 8\pi h\nu^3 c^{-3} \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)^{-1}. \quad (XVI)$$

Это и есть известная формула Планка, которую он получил, допустив, что электромагнитная энергия излучается отдельными порциями – квантами. Формула (XVI), в отличие от полученных в рамках классической физики

формулы Релея-Джинса и Вина, совпадает с экспериментальными данными во всем интервале частот. Нетрудно увидеть, что из формулы Планка при $h\nu \gg kT$ получаем формулу Вина, а при $h\nu \ll kT$ – формулу Релея-Джинса.

Найдем суммарную энергию излучения в данном объеме. Для этого выражение (XV) необходимо проинтегрировать: $E = 8\pi hc^{-3}V \int_0^{\infty} v^3 \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)^{-1} dv$.

Вводя новую переменную $x = \frac{h\nu}{kT}$, и учитывая, что $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$, получим:

$$E = \sigma VT^4 \quad (\text{XVII})$$

где $\sigma = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3}$ – постоянная Стефана-Больцмана, которую, в отличие от термодинамического описания теплового излучения, легко рассчитать.

Отметим, что выражение (XIV) позволяет определить количество фотонов, которые в состоянии равновесия могут в среднем находиться при заданной температуре T в объеме V :

$$N = 8\pi c^{-3}V \int_0^{\infty} v^2 \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)^{-1} dv = const \cdot T^3 \cdot V \quad (\text{XVIII})$$

Из полученного выражения видно, что в данном объеме при заданной температуре может быть лишь однозначно определенное количество фотонов и концентрация фотонов (а значит и плотность энергии равновесного излучения) однозначно связана с температурой.

Далее в качестве упражнения, которое студенты решают на лекции, получаем закон смещения Вина. Для этого, очевидно, необходимо проанализировать на экстремум выражение (XVI).

$$\nu_{\max} = const \cdot T. \quad (\text{XIX})$$

В заключение рассмотрения теплового излучения указываем, как рассчитываются термодинамические потенциалы фотонного газа статистическим методом. Зависимость внутренней энергии от температуры статистическим методом мы уже получили – это выражение (XVII), поэтому можно воспользоваться уравнением Гиббса-Гельмгольца, которое (при

постоянном объеме полости, в которой существует тепловое излучение) приведем к следующему виду: $F = -T \int \frac{EdT}{T^2}$. Подставляя в это выражение внутреннюю энергию теплового излучения (XVII), получим уже известное (из термодинамического рассмотрения теплового излучения) выражение для свободной энергии, дифференцируя которое, получаем энтропию фотонного газа и давление, а также уравнение состояния: $pV = \frac{E}{3}$. По вычисленным величинам определяем термодинамический потенциал Гиббса и энтальпию. Полученные законы излучения абсолютно черного тела и выражения для термодинамических потенциалов совпадают с выводами термодинамического метода. Но, в отличие от термодинамического метода, при статистическом описании фотонного газа не возникает необходимости в заимствовании уравнений состояния из других разделов физики.

Таким образом, статистический подход, с последовательным и строгим учетом свойств бозонного газа (дискретность энергии, тождественность, спин и отсутствие массы покоя), позволил не только объяснить закономерности излучения абсолютно черного тела и тем самым устранить причины, которые породили в физике состояние, известное под названием "ультрафиолетовая катастрофа", но и дал теоретическое обоснование сверхтекучести и сверхпроводимости.

Следует также отметить, что рассмотренная методика изложения вопроса о статистике Бозе-Эйнштейна охватывает все ключевые аспекты этого вопроса, не содержит избыточной информации и математических сложностей и поэтому, как показывает собственный опыт преподавания теоретической физики, достаточно легко и с интересом воспринимается студентами.

Литература:

1. Ансельм А.И. Основы статистической физики и термодинамики. / Ансельм А.И. – М.: Наука, 1973. – 424с.

2. Леонтович М.А. Введение в термодинамику. Статистическая физика. / М.А. Леонтович – М.: Наука, 1983. – 416 с.
3. Василевский А.С. Статистическая физика и термодинамика. / А.С. Василевский, В.В. Мултановский – М.: Просвещение, 1985. – 255 с.
4. Мороз І.О. Висвітлення протиріч класичної статистики в курсі термодинаміки та статистичної фізики / Мороз І.О. // Вісник черкаського університету. Серія: Педагогічні науки. – Черкаси, 2012. – № 12 (225). – С. 80 – 84.
5. Ландау Л. Д. Статистическая физика. / Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М. – М.: Наука, 1964. – 568с.
6. Мороз І.О. Основы термодинамики и статистической физики. Учебное пособие. / І.О. Мороз. – Сумы: Издательство «МакДен», 2012. – 565 с.
7. Терлецкий Я.П. Статистическая физика / Терлецкий Я.П. – М.: «Высшая школа», 1973. – 280с.
8. Корнелл Э.А. Нобелевские лекции по физике. / Э.А. Корнелл, К.Э. Виман // Успехи физических наук. – Т.173, №12. – 2003. – С. 1320-1358.
9. Васильев С.А. Бозе-конденсация в идеальном газе. / С.А. Васильев // Природа. – 1996. – N1. – С. 58-69.

Справка об авторе:

Мороз Иван Алексеевич,

научная степень - канд. техн. наук,

научное звание - доцент,

должность - профессор кафедры экспериментальной и теоретической физики