Abstract. Mashchenko G. Functions in the study of economic processes.
The article deals with the application of mathematical methods in the study of economic processes, including the use of the concept of function.
Keywords: *mathematical model, economic - mathematical model function.*

Марина Межирицька
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
maryna765@gmail.com
Науковий керівник – В.Д. Погребний

ЗАДАЧІ НА АЛГЕБРАЇЧНІ РІВНЯННЯ, ЩО МІСТЯТЬ ПАРАМЕТР

Вивчення багатьох фізичних процесів і геометричних закономірностей часто приводить до розв'язання рівняння, що містить параметр. Розв'язування задач з параметрами викликає великі труднощі в учнів, так як їх вивчення не є окремою складовою шкільного курсу математики, і вони розглядається в основному на факультативних заняттях, а їх розв'язування потребує не тільки знання властивостей функцій і рівнянь а й вміння виконувати алгебраїчні перетворення, вимагає від учнів високої логічної культури і доброї техніки дослідження.

Алгебраїчне рівняння – рівняння виду $P(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, де P – многочлен від змінних $x_1, x_2, ..., x_n$. Ці змінні називають також невідомими.

Алгебраїчні рівняння з параметрами можна класифікувати так:
- Лінійні рівняння
- Квадратні рівняння і рівняння які зводяться до них
- Рівняння вищих степенів
- Дробово-раціональні рівняння, які зводяться до лінійних
- Ірраціональні рівняння
- Системи рівнянь з параметрами

Рівняння виду
$$ax - b = 0$$
де a і b – вирази залежні тільки від параметрів, а x – невідома, називається лінійним відносно змінної x.

Воно зводиться до виду $ax = b$ і при $a \neq 0$ має єдиний розв'язок $x = \frac{b}{a}$ при будь-якій системі допустимих значень параметрів.

При $a = 0$ і $b = 0$, x - будь-яке число, а при $b \neq 0$ і $a = 0$ розв'язків немає.

Рівняння виду
$$ax^2 + bx + c = 0,$$
де x – невідоме, a, b, c – вирази, залежні тільки від параметрів і $a \neq 0$, називається квадратним відносно x.

Допустимими будемо вважати тільки ті значення параметрів, при яких a, b, c – дійсні.

Рівняння з дробовими членами зводяться до лінійних рівнянь.

Інколи рішення таких рівнянь зводиться до знаходження коренів квадратного рівняння [1]. Розглянемо, наприклад, рівняння
$$\frac{x}{a(x+1)} - \frac{2}{x+2} = \frac{3-a^2}{a(x+1)(x+2)}.$$

При $a=0$ воно не має змісту, значення x повинно задовольняти умови $x \neq -1$, $x \neq -2$. Помноживши обидві частини даного рівняння на $a(x+1)(x+2) \neq 0$, отримаємо рівняння $x^2 - 2(a-1)x + a^2 - 2a - 3 = 0$, рівносильне даному. Звідси

$$x_1 = a+1, \quad x_2 = a-3.$$

Серед отриманих коренів можуть бути і сторонні, а саме ті, при яких $(x+2)(x+1)$ обертається в 0. Щоб виокремити їх, необхідно дізнатися, при яких значеннях a отримані корені (або один з них) приймають значення -2 або -1.

$x_1 = a+1 = -2$ при $a=-3$, при цьому $x_2 = a-3 = -6$,

$x_1 = a+1 = -1$ при $a=-2$, при цьому $x_2 = a-3 = -5$,

$x_2 = a-3 = -2$ при $a=1$, при цьому $x_1 = a+1 = 2$,

$x_2 = a-3 = -1$ при $a=2$, при цьому $x_1 = a+1 = 3$.

Отже, при $a \neq 0$, $a \neq -3$, $a \neq \pm 2$, $a \neq 1$ $x_1 = a+1$, $x_2 = a-3$; при $a=-3$ $x=-6$; при $a=-2$ $x=-5$; при $a=1$ $x=2$; при $a=2$ $x=3$; при $a=0$ рівняння немає змісту.

Воно зводиться до виду $ax=b$ і при $a \neq 0$ має єдиний розв'язок $x = \dfrac{b}{a}$ при будь-якій системі допустимих значень параметрів.

При $a=0$ і $b=0$, x - будь-яке число, а при $b \neq 0$ і $a=0$ розв'язків немає.

Рівняння виду

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \ (n \in N, a_0 \neq 0)$$

де x – невідома, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – вирази, які залежні тільки від параметрів є алгебраїчним рівнянням степеня n. Якщо $n > 2$, то дане рівняння називається рівнянням вищого степеня.

Алгебраїчне рівняння степеня n має не більше ніж n дійсних коренів.

Тричленним називається рівняння виду $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, де $abc \neq 0, n > 1$, $n \in N$. Щоб розв'язати таке рівняння, за допомогою підстановки $x^n = z$, спочатку одержуємо квадратне рівняння $az^2 + bz + c = 0$, а далі відповідно до того, скільки коренів має це квадратне рівняння.

При $n=2$ тричленне рівняння має вигляд $ax^4 + bx^2 + c = 0$ і називається біквадратним рівнянням. За допомогою підстановки $x^2 = z$, $z \geq 0$, воно зводиться до квадратного.

Рівняння виду $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_0 = 0$ при $a_0 \neq 0, a_0 \neq 1$ називається незведеним цілим раціональним рівнянням.

Рівняння виду $x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = 0$ називається зведеним цілим раціональним рівнянням.

При розв'язанні зведених цілих раціональних рівнянь використовують теореми про корені та ділення кутом многочленів:

1. Якщо $x = p$ – корінь многочлен $P_n(x)$, то $P_n(x)$ ділиться без остачі на $x - p$.

2. Нехай всі коефіцієнти многочлена $P_n(x)$ – цілі числа, причому старший коефіцієнт дорівнює 1. Якщо такий многочлен має своїм коренем раціональне число, то це число – ціле.

3. Якщо многочлен з цілими коефіцієнтами має цілі корені, то ці корені є дільниками вільного члена.

Процес розв'язання дробових рівнянь відбувається за звичайною схемою: дробове рівняння замінюється шляхом множення обох частин рівняння на спільний знаменник лівої і правої його частин. Після чого учні розв’язують відомим їм способом ціле рівняння, виключаючи сторонні корені, тобто числа, які обертають спільний знаменник в нуль. У разі рівнянь з параметрами ця задача більш складна. Тут, щоб виключити сторонні корені, потрібно знаходити значення параметра, що обертає спільний знаменник в нуль, тобто розв’язувати відповідні рівняння щодо параметра [3].

Рівняння у яких змінна знаходиться під знаком кореня, називають ірраціональними. Для розв’язування задане ірраціональне рівняння найчастіше зводять до раціонального рівняння за допомогою деяких перетворень.

Якщо до запису ірраціонального рівняння, крім змінної та числових коефіцієнтів, входять також буквені коефіцієнти – параметри, то при розв’язуванні таких рівнянь можна користуватися наступним орієнтиром. А саме: будь-яке рівняння з параметрами можна розв’язати як звичайне рівняння до тих пір, поки всі перетворення або міркування, необхідні для розв’язання, можна виконати однозначно. Якщо якесь перетворення не можна виконати однозначно, то розв’язування необхідно розбити на кілька випадків, щоб у кожному з них відповідь через параметри записувалася однозначно [2].

Головними особливостями при рішенні рівнянь такого типу є:

1. Обмеження області визначення невідомої x, тому що вона змінюється залежно від значення параметра.

2. У розв’язанні рівнянь виду $\sqrt{f(x,a)} = g(x,a)$ при піднесенні у квадрат необхідно враховувати знак $g(x,a)$ і робити перевірку коренів.

При розгляді всіх особливих випадків і піднесенні обох частин ірраціонального рівняння у квадрат ми переходимо до розв’язання квадратного рівняння з параметром.

У підручнику Неліна Є.П. [2], подано такі два основних методи розв’язування нерівностей, що містять параметр:

1) за допомогою піднесення обох частин рівняння до одного степеня;

2) а допомогою заміни змінних.

При піднесенні обох частин рівняння до непарного степеня завжди одержуємо рівняння, рівносильне заданому (на його ОДЗ).

При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня можуть з’явитися сторонні корені, які відсіюються перевіркою.

Якщо для розв’язування ірраціонального рівняння обидві частини піднести до парного степеня, то одержуємо рівняння-наслідок – коли всі корені першого рівняння будуть коренями другого, але друге рівняння може мати корені, що не задовольняють заданому рівнянню. Такі корені називають сторонніми для заданого рівняння. Щоб з’ясувати, чи є одержані числа коренями заданого рівняння, виконують перевірку одержаних розв’язків.

Розглянемо кілька способів розв’язування таких рівнянь.

1) $\sqrt{x^2 + ax - 2a} = x + 1$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату і отримаємо

$$x^2 + ax - 2a = x^2 + 2x + 1$$
$$(a-2)x = 2a + 1$$

При $a = 2$ рівняння розв’язків немає.

При $a \neq 2$ $x = \dfrac{2a+1}{a-2}$.

Для перевірки розв’язку підставимо знайдене x в початкове рівняння.

Ліва частина

$$\sqrt{\frac{(2a+1)^2}{(a-2)^2}+\frac{a(2a+1)}{a-2}-2a}=\sqrt{\frac{(3a-1)^2}{(a-2)^2}}=\left|\frac{3a-1}{a-2}\right|.$$

При $a \le \frac{1}{3}$ і при $a > 2$ $\left|\frac{3a-1}{a-2}\right| = \frac{3a-1}{a-2}$;

при $\frac{1}{3} < a < 2$ $\left|\frac{3a-1}{a-2}\right| = \frac{1-3a}{a-2}$.

Права частина

$$\frac{2a+1}{a-2}+1=\frac{3a-1}{a-2}$$

Звідси видно, що $x=\frac{2a+1}{a-2}$ є коренем рівняння при $a \le \frac{1}{3}$ і при $a > 2$.

При $\frac{1}{3} < a < 2$ розв’язків немає.

2) Розглянемо тепер другий спосіб розв’язування цього рівняння. Його корінь повинен задовольняти такі умови

$$x^2+ax-2a \ge 0 \text{ і } x+1 \ge 0.$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату і отримаємо

$$x^2+ax-2a=(x+1)^2$$

будь-який корінь задовольняє умову $x^2+ax-2a \ge 0$, так як $(x+1)^2 \ge 0$.

Звідси слідує, що рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2+ax-2a=(x+1)^2 \\ x \ge -1 \end{cases}$$

При $a=2$ вона розв’язків не буде мати, при $a \ne 2$ отримаємо

$$\begin{cases} x=\dfrac{2a+1}{a-2} \\ x \ge -1 \end{cases}$$

Тепер необхідно знайти ті значення a, при яких $\frac{2a+1}{a-2} \ge -1$.

Ця нерівність рівносильна сукупності двох систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>2 \\ 2a+1 \ge -a+2 \end{cases} \\ \begin{cases} a<2 \\ 2a+1 \le -a+2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Отже, $\frac{1}{3} < a < 2$.

Як бачимо, відповідь отримали однакову.

Алгебраїчні рівняння з n змінними, для яких треба знайти розв’язки, що задовольняють одночасно всім рівнянням, називають системою n алгебраїчних рівнянь з n змінними.

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,...,x_n)=0 \\ f(x_1,x_2,...x_n)=0 \\ \quad ... \\ f(x_1,x_2,...,x_n)=0 \end{cases}$$

Системи рівнянь, які не мають розв'язків, називаються несумісними.

При розв'язанні систем рівнянь з параметрами використовують всі відомі способи розв'язання систем рівнянь: підстановка, додавання, графічний спосіб.

Список використаних джерел

1. Горнштейн П.И. Задачи с параметрами / П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М.С.Якир. – К.: РИА „Текст"; МП „ОКО", 1992. – 290 с.
2. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підр. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Є. П. Нелін. – 4- те вид., випр. і доп. – Х.: Світ дитинства, 2008. – 448 с.
3. Ястребницкий Г. А. Уравнения и неравенства, содержащие параметры. Пособие для учителей / Г. А. Ястребницкий. – М.: „Просвещение", 1972. – 128 с.

Анотація. Межирицька М. Задачі на алгебраїчні рівняння що містять параметр.

У статті висвітлено класифікацію алгебраїчних рівнянь. Розглянуто означення лінійних, квадратних, рівнянь вищих степенів, дробово-раціональних, ірраціональних рівнянь та систем алгебраїчних рівнянь що містять параметри. Розглянуті головні особливості при вирішенні алгебраїчних рівнянь що містять параметри.

Ключові слова: *лінійні, квадратні, рівняння вищих степенів, дробово-раціональні, ірраціональні рівняння та системи рівнянь що містять параметри.*

Abstract. Mezhyrytska M. Challenges for the algebraic equations containing a parameter.

The article deals with the classification of algebraic equations. Definition considered linear, square, equations of higher degrees, fractional rational, irrational algebraic equations and systems of equations containing parameters. Considered the main features in solving algebraic equations containing parameters.

Keywords: *linear, square, equations of higher degrees, fractional rational, irrational equations and systems of equations containing parameters.*

Оксана Москальова

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

ksenqkazaraza@mail.ru

Науковий керівник – О.В. Мартиненко

СПЕЦИФІКА НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ УЧНІВ З ОСОБЛИВИМИ ОСВІТНІМИ ПОТРЕБАМИ

Психолого-педагогічні дослідження свідчать, що для розумово відсталих учнів характерні певні порушення як чуттєвих, так і раціональних форм пізнання, а також наявність недостатньої кількості зв'язків між ними. Це призводить до труднощів при переході від чуттєвих форм сприйняття до узагальненого абстрактного мислення, а також у випадку необхідності конкретизувати узагальнені абстрактні поняття [4].

Проаналізувавши літературу з даної проблеми, ми можемо зазначити, що спеціалісти рекомендують для використання на уроках математики такі методи: залежно **від форми організації спільної діяльності вчителя й учнів** – розповідь, бесіда, самостійна робота; **від джерела знань** – словесні методи (розповідь або виклад знань, бесіда, робота з підручниками або іншими друкованими матеріалами), наочні методи (спостереження, демонстрація предметів або їхніх зображень), практична робота (вимірювання, креслення геометричних фігур, ліплення, аплікація, моделювання,