спрямованість навчання математичних дисциплін.

Висновки. Зміст курсу вищої математики в аграрних університетах має бути професійно спрямованим. Викладачу вищої школи необхідно враховувати особливості змісту професійних умінь майбутніх фахівців. Шляхами реалізації професійної спрямованості курсу вищої математики є диференціація навчання, використання міжпредметних зв'язків, а також вирішення професійно спрямованих завдань у процесі навчання майбутніх фахівців-аграріїв.

ЛІТЕРАТУРА

1. Галузевий стандарт вищої освіти України. Освітньо-професійна програма підготовки бакалавра напряму 0919 «Механізація та електрифікація сільського господарства». – К. : Міністерство освіти і науки України, 2005. – 162 с.

2. Галузевий стандарт вищої освіти України. Освітньо-професійна програма підготовки фахівця. Напрям підготовки – 6.090103 «Лісове і садово-паркове господарство». Освітньо-кваліфікаційний рівень – бакалавр. – Суми : СНАУ, 2010. – 31 с.

3. Галузевий стандарт вищої освіти України. Освітньо-професійна програма підготовки бакалавра напряму 1301 «Агрономія». – К. : Міністерство освіти і науки України, 2005. – 184 с.

РЕЗЮМЕ

Н. С. Борозенец. Профессиональная направленность содержания курса высшей математики в аграрных университетах.

В статье проанализирована профессиональная направленность содержания курса высшей математики, определены пути ее реализации при обучении студентов разных специальностей аграрных университетов.

Ключевые слова: *содержание, высшая математика, профессиональная направленность, аграрные университеты.*

SUMMARY

N. Borozenets. Professional orientation of content of higher mathematics course for Agriculture University.

The article examined professional orientation of content of higher mathematics course, defined its realization lines within educative process for different specialty students of Agriculture Universities.

Key words: content, higher mathematics, professional orientation, Agriculture Universities.

УДК 378.147:514.144

О. В. Заїка
Національний педагогічний
університет імені М. П. Драгоманова

БАЗОВІ ЗАДАЧІ В КУРСІ ПРОЕКТИВНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

У статті висвітлюється питання виділення найпростіших та основних задач на побудову в курсі проективної геометрії. Демонструється їх розв'язання та застосування до розв'язування інших задач, зокрема задач з недосяжними елементами. Пропонується класифікація задач з недосяжними елементами.

Ключові слова: *проективна геометрія, задачі на побудову, основні задачі на побудову, найпростіші задачі на побудову, недосяжні елементи, проективні форми, проективна відповідність, класифікація задач на побудову.*

Постановка проблеми. Особливістю задач з проективної геометрії є те, що вони, як правило, є задачами на побудову, а такі задачі, як відомо, є евристичними, творчими і викликають труднощі у студентів. Крім того, на утворення вмінь розв’язувати задачі з даного курсу виділяється невелика кількість годин (в середньому вона становить 28 годин), а тому є необхідність виведення для таких задач алгоритмічних приписів, якщо не алгоритмів. Адже послідовне виконання певних кроків легше запам’ятовуються і відкладаються в пам’яті людини.

Аналіз актуальних досліджень. Курс проективної геометрії можна розглядати синтетично та аналітично. Перший підхід є ближче до шкільної геометрії, ніж другий, але в сучасній літературі в більшості розглядається другий спосіб або їх поєднання. Так, наприклад, О. Чемерис [2] досліджує питання фундаментальної підготовки майбутніх учителів математики на основі виділення методичної системи навчання проективної геометрії, не заглиблюючись в особливості задач даного курсу. Л. Панченко [1] розглядає вивчення проективної геометрії з аналітичної точки зору і демонструє можливості використання моделювання в курсі проективної геометрії. Л. Циганок [3] розглядає застосування координатного методу у викладанні проективної геометрії.

Крім того, багато сучасних досліджень стосуються використанню комп’ютерних технологій (Mathematics, MathCAD) під час вивчення курсу, при цьому втрачається одне із завдань курсу – формування вмінь розв’язувати задачі на побудову, зокрема за допомогою однієї лінійки.

Оскільки курс проективної геометрії традиційно у ВНЗ викладається аналітико-синтетичним способом, то викладачі не звертають особливої уваги на деякі задачі на побудову, які лежать в основі розв’язання решти задач одного типу. Такі задачі, на нашу думку, повинні бути обов’язково виділені в змісті курсу проективної геометрії.

Мета статті – виділити найпростіші та основні задачі на побудову курсу проективної геометрії, демонстрація їх застосування до розв’язування задач, зокрема з недосяжними елементами.

Виклад основного матеріалу. В навчальній роботі можна виділити два види задач: традиційні, аналогічні тим, які багаторазово розв’язувалися одним і тим самим способом і завжди в одній і тій самій послідовності, і задачі другої групи, які доводиться розв’язувати не в традиційних, звичних ситуаціях, а в умовах незвичайних (якими є майже всі задачі на побудову). Розв’язання таких задач багатоваріантно.

Як відомо, в шкільному курсі планіметрії в теорії конструктивної геометрії виділяють найпростіші побудови, які лежать в основі основних побудов, які, в свою чергу, лежать в основі розв’язування багатьох інших задач. По аналогії до цього пропонуємо в курсі проективної геометрії також виділити найпростіші та основні побудови (задачі на побудову).

До найпростіших побудов ми відносимо такі.

Побудувати:

1) промінь *AB*, якщо побудовані точки *A* і *B*;
2) відрізок *AB*, якщо побудовані точки *A, B*;
3) пряму *AB*, якщо побудовані точки *A, B*;
4) коло, якщо побудовані його центр і відрізок, що рівний радіусу;
5) точку перетину двох побудованих (зокрема паралельних) прямих;
6) невласну точку, якщо побудована пряма, що їй належить, або пучок паралельних прямих;
7) точку перетину побудованої прямої і кола, якщо такі існують;
8) точку перетину двох побудованих кіл, якщо такі точки існують;
9) точку, яка належить побудованій фігурі;
10) точку, яка не належить побудованій фігурі, якщо вона не співпадає з усім простором;
11) невласну пряму, якщо побудована площина, яка їй належить, або пучок паралельних площин.

Більшість задач проективної геометрії є задачі на побудову, яка виконується за допомогою однієї лінійки. В основному задачі на побудову, які містять елементи форм першого ступеня розв'язуються за допомогою таких понять та тверджень, як конфігурація Дезарга (пряма та обернена теореми), повний чотиривершинник та його властивості, четвірка гармонічних точок, гомологія.

Задачі на побудову, які містять форми другого ступеня розв'язуються за допомогою таких понять та тверджень, як відповідні елементи в проективній відповідності, теореми Паскаля та Бріаншона, полюс і поляра.

Тому до основних задач ми відносимо:

1) побудова конфігурації Дезарга;
2) побудова повного чотиривершинника;
3) побудова гармонічної четвірки точок;
4) поділ відрізка навпіл;
5) побудова прямої, що проходить через задану точку паралельно до заданого відрізка, якщо вказано його середину;
6) побудова відповідних елементів першого ступеня в проективній відповідності;
7) побудова відповідних елементів в інволюційній відповідності для рядів із спільним носієм;
8) побудова точки многокутника, вписаного (описаного) в криву другого порядку (побудова точки, що належать до кривої другого порядку);
9) побудова поляри для заданої точки (полюса для заданої поляри);
10) побудова відповідних елементів в гомології.

Зауважимо, що до основних задач можна було б віднести ще таку: «Побудувати пряму, що проходить через задану точку, паралельно до двох заданих паралельних прямих», оскільки її розв'язання можна алгоритмізувати, чітко виділивши кроки її розв'язання, і вона часто використовується під час розв'язування інших задач. Але ця задача може бути розв'язана трьома способами (за допомогою конфігурації Дезарга, повного чотиривершинника та поняття гомології), саме з цієї причини вона не ввійшла до виділених нами основних задач на побудову.

Оскільки в задачах проективної геометрії під час побудови часто будуються деякі прямі чи точки довільно, то деякі із виділених основних задач на побудову можуть мати декілька варіантів послідовності виконання побудови (наприклад, такою є побудова повного чотиривершинника), а деякі лише один (побудова відповідних елементів форм першого ступеня: двох прямолінійних рядів точок, двох пучків). Тому для формування вмінь розв'язувати задачі варто студентам запропонувати одну певну послідовність (алгоритм) розв'язування таких задач, а на самостійну роботу винести завдання по отриманню інших способів розв'язання (якщо вони існують).

Розглянемо, наприклад розв'язання таких основних задач: повного чотиривершинника, побудова відповідних елементів першого ступеня в проективній відповідності.

І. Побудова довільного повного чотиривершинника.

Задача. Побудувати довільний повний чотиривершинник.

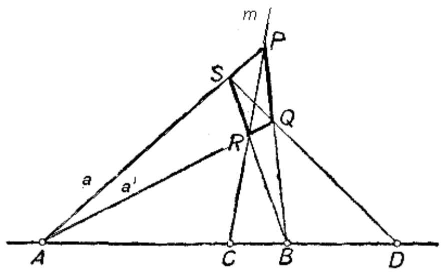

рис.1

Побудова.

1. На одній прямій обрати довільно дві точки, які вважати подвійними (діагональними).

2. Провести через обрані точки по дві прямі, щоб вони попарно перетинались.

3. В результаті такого перетину отримується чотирикутник, провівши його діагоналі до перетину з обраною прямою, отримуємо повний чотиривершинник, у якого обрана пряма є діагональною, проведені діагоналі чотирикутника – його сторонами, що проходять через третю діагональну точку (точка їх перетину) (на *рис. 1 SPQR* – повний чотиривершинник, *AB* – діагональна пряма).

Доведення. Отримана фігура складається з чотирьох точок загального положення, шести прямих, що з'єднують ці точки попарно, отже, за означенням, побудована фігура – повний чотиривершинник.

Дослідження. Задача завжди має розв'язок, оскільки виконуються всі кроки побудови. Навіть, якщо в п. 3 проведені діагоналі виявляться такими, що одна з них буде паралельною до діагональної прямої, то це буде означати, що вони перетинаються у нескінченно віддаленій точці, а точка перетину іншої діагоналі з діагональною прямою є серединою відрізка, який утворюють подвійні точки.

ІІ. Побудова повного чотиривершинника, коли задано три точки на одній прямій.

Задача. Побудувати повний чотиривершинник, якщо відомо три точки, що належать до однієї прямої.

Аналіз. Оскільки точки належать до однієї прямої, то вони не можуть бути вершинами шуканого повного чотиривершинника, тому вважаємо задану пряму – діагональною, тоді дві із заданих точок є подвійними (діагональними), а третя – це точка перетину сторони повного чотиривершинника, що проходить через третю діагональну точку з діагональною прямою.

Побудова.

1. Через одну із подвійних точок проводимо дві довільні прямі *a* і *a'*.

2. Через неподвійну точку проводимо довільну пряму до перетину із *a* і *a'*, знаходимо точки їх перетину.

3. Через знайдені точки перетину і третю задану точку проводимо дві прямі до перетину із прямими *a* і *a'*.

4. В результаті одержується повний чотиривершинник, в якому потрібно провести пряму, що з'єднує дві його вершини, відмінні від отриманих в другому кроці (рис. 1).

Доведення. Отримана фігура складається з чотирьох точок загального положення, шести прямих, що з'єднують ці точки попарно, протилежні сторони перетинаються в заданих точках, що належать до діагональної прямої (за побудовою), отже за означенням побудована фігура – повний чотиривершинник.

Дослідження. Задача завжди має розв'язок.

Задача. Побудувати відповідні елементи двох проективних форм першого ступеня.

Особливістю розв'язання цієї задачі полягає в можливості використання принципу двоїстості. Розв'язання задачі варто оформити у вигляді таблиці, яка складається з двох колонок (Таблиця 1). Так побудова відповідних елементів двох прямолінійних рядів точок заповнюються в аудиторії (ліва колонка таблиці), виводиться алгоритм розв'язання такої задачі, а праву колонку (побудова відповідних елементів двох проективних пучків) студенти заповнюють самостійно, використовуючи принцип двоїстості, із перевіркою на практичних заняттях.

Таблиця 1

Побудова відповідних елементів проективних форм першого ступеня

Алгоритм	
Маємо два проективні ряди точок. 1. Через дві довільні відповідні точки заданих рядів проводимо пряму, на якій довільним чином обираємо два центри проектування; з першого проектуємо точки першого ряду, з другого – другого.	Маємо два проективні пучки. 1. Через точку перетину двох довільних відповідних прямих заданих пучків проводимо довільно дві прямі, на які відповідно проектуємо задані пучки.
2. Оскільки отримані пучки є перспективними, то шукаємо вісь перспективи, яка проходить через точки перетину відповідних прямих отриманих пучків.	2. Оскільки отримані ряди точок є перспективними, то шукаємо центр перспективи, який отримується в перетині прямих, що проходять через відповідні точки отриманих рядів точок.
3. Маючи вісь перспективи будуємо точки, відповідні до заданих точок. Наприклад, для заданої точки першого ряду шукаємо їй відповідну. Для цього проводимо пряму через цю точку із першого центра до перетину з віссю перспективи, через отриману точку і другий центр проводимо пряму до перетину з другим рядом точок, отримана точка перетину і є відповідною для заданої.	3. Маючи центр перспективи будуємо прямі, відповідні до заданих прямих. Наприклад, для заданої прямої першого пучка шукаємо їй відповідну. Для цього знаходимо точку перетину цієї прямої з першим рядом точок проведеним в п.1, проводимо пряму через отриману точку і центр перспективи до перетину з другим рядом точок (п.1), через отриману точку перетину і центр другого пучка проводимо пряму, яка і є відповідною для заданої.

Основні задачі на побудову лежать в основі розв’язування напівалгоритмічних та евристичних задач на побудову. До напівалгоритмічних задач можна віднести задачі з недосяжними елементами.

Під час розв’язування задач з недосяжними (недоступними) елементами (такими є точки перетину паралельних прямих, або точки перетину прямих, які перетинаються за межами креслення) найчастіше використовуються пряма та обернена теореми Дезарга, поняття та властивості повного чотиривершинника, поняття гомології.

Задачі з недосяжними елементами можна поділити на три типи.

I. На побудову точки перетину двох прямих, без побудови однієї з них.

Дано пряма n і точки A і B, що не лежать на ній. Користуючись лише лінійкою, побудувати точку перетину прямої n з AB, не будуючи прямої AB.

Або: Користуючись лише лінійкою, побудувати точку перетину даної прямої a з недосяжною прямою, що визначається точками A і B.

Або: Провести пряму через доступну точку L і точку перетину двох прямих a і AB, одна з яких (AB) недоступна.

II. На побудову прямої, що проходить через задану та недосяжну точки.

На площині задані прямі a і b, які перетинаються за межами рисунка, і точка C, яка не належить цим прямим. За допомогою лише лінійки побудувати пряму, яка проходить через точку *C* і недоступну точку перетину прямих *a* і *b.*

Або: Вершина *D* чотирикутника *ABCD* – недоступна точка. Знайти точку перетину діагоналей цього чотирикутника.

III. На побудову прямої, що проходить через дві недосяжні точки.

Дано паралелограм *ABCD* своїми сторонами, дві його вершини *A* і *C* – недоступні точки. Побудуйте пряму *AC.*

Або: На кресленні обмежених розмірів задано дві пари прямих: *p* і *q,* що перетинаються в недоступній точці *A,* і *u* і *v*, що перетинаються в недоступній точці *B.* Побудувати доступну частину прямої *AB.*

Розглянемо, наприклад, розв'язування задачі з недосяжними елементами другого типу за допомогою десятої основної задачі на побудову.

Задача. Побудувати пряму, що проходить через задану точку *C*, паралельно до двох заданих паралельних прямих *a* і *b*.

Аналіз. Якщо одну із заданих прямих вважати віссю гомології, другу – пряму, до якої шукається гомологічна, що проходить через задану точку, то обравши довільно центр гомології та провівши через неї і задану точку пряму до перетину із гомологічною прямою, отримуємо дві відповідні точки. Гомологія є заданою. Задача зводиться до побудови другої пари відповідних точок, що належать до заданої та шуканої гомологічних прямих.

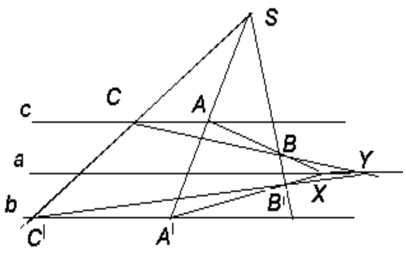

рис.2

Побудова.

1. Задати гомологію, вважаючи одну із заданих прямих і шукану гомологічними, другу задану пряму – віссю гомології, довільну точку – центр гомології та дві пари гомологічних точок: на заданій прямій і задана точка.

2. Для довільної точки, що не належить до заданих прямих побудувати їй гомологічну, за допомогою заданої пари гомологічних точок.

3. Для довільної точки гомологічної прямої побудуємо гомологічну з нею точку за допомогою пари гомологічних точок знайдених в попередньому кроці.

4. Через знайдену і задану точку провести пряму.

На *рис. 2* заданими гомологічними є точки *C* і *C'*, обраними: *A* і *A'*, *B* і *B'*.

Доведення. Отримали гомологію, в якій задані гомологічні прямі перетинаються у нескінченно віддаленій точці, оскільки задана пряма є паралельною до вісі гомології.

Дослідження. Задача завжди має розв'язок, причому єдиний.

Висновки. Як показав наш педагогічний досвід, якщо використовувати такий поділ задач на побудову: виділити найпростіші та основні задачі курсу проективної геометрії, то це сприяє кращому запам'ятовуванню теоретичних основ курсу і дає змогу сформувати вміння розв'язувати ці задачі та решти задач, які в основі мають виділені основні задачі. Самостійна робота по знаходженню різних способів розв'язання однієї і тієї ж задачі сприяє розвитку у студентів творчого мислення. Отже, в змісті курсу обов'язково варто виділити в окрему тему зазначені вище задачі разом із демонстрацією їх застосування.

ЛІТЕРАТУРА

1. Панченко Л. Л. Навчання студентів математичному моделювання у вузівських курсах геометрії [Електронний ресурс]. – Режим доступу : www.donnu.edu.ua/journals/dm/_22/50-57 22_2004.pdf.

2. Чемерис О. А. Технологія забезпечення якості фундаментальної підготовки майбутніх вчителів математики [Електронний ресурс]. – Режим доступу : www.nbuv.gov.ua/portal/soc_gum/VZhDU/2010_49/Vip_49_12.pdf.

3. Циганок Л. В. Про застосування координатного методу у викладанні проективної геометрії / Л. В. Циганок, О. В. Головченко // Фізико-математичні записки : збірник наукових праць / М-во освіти і науки України, Ніжинський держ. ун-т ім. М. Гоголя ; редкол. В. О. Аніщенко (відп. ред.) та ін. – Ніжин : НДУ, 2006. – С. 122–132.

РЕЗЮМЕ

О. В. Заика. Базовые задачи в курсе проективной геометрии.

В статье выделяются простейшие и основные задачи на построение в курсе проективной геометрии. Демонстрируется их решение и использование для решения других задач, в том числе и задач с недоступными элементами. Предлагается классификация задач с недоступными элементами.

***Ключевые слова**: проективная геометрия, задачи на построение, основные задачи на построение, простейшие задачи на построение, недоступные элементы, проективные формы, проективная ответственность, классификация задач на построение.*

SUMMARY

O. Zaika. Base tasks in a course projective geometry.

The article highlights the most simple and basic tasks for building courses projective geometry, demonstrating their application to solving particular problems of inaccessible elements. Invites classification problems with inaccessible elements.

Key words: projective geometry, tasks on a construction, basic tasks on a construction, simplest tasks on a construction, inaccessible elements, projective forms, projective responsibility, the classification of tasks on construction.