РОЗДІЛ ІІІ. СПРЯМОВАНІСТЬ НАВЧАННЯ ДИСЦИПЛІН ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНОГО ЦИКЛУ НА РОЗВИТОК ТВОРЧОЇ ОСОБИСТОСТІ УЧНЯ

УДК 372:851:373.5

В. В. Ачкан
Бердянський державний педагогічний університет

ФОРМУВАННЯ ЛОГІЧНОЇ ТА ДОСЛІДНИЦЬКОЇ МАТЕМАТИЧНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ СТАРШОКЛАСНИКІВ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

У статті розкриті методичні аспекти формування логічної та дослідницької математичних компетентностей старшокласників у процесі вивчення рівнянь та нерівностей. Наведені шляхи набуття учнями цих компетентностей та запропоновані засоби їх формування.

Ключові слова*: математичні компетенності, рівняння та нерівності, старша школа.*

Постановка проблеми. В контексті реформування математичної освіти, побудови особистісно орієнтованої системи математичної підготовки, важливого значення набуває впровадження компетентнісного підходу в організацію навчання. Необхідність реалізації компетентнісного підходу задекларована в Загальних критеріях оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загальної середньої освіти, що були затверджені Міністерством освіти та науки України [5]. В той же час залишаються не усунутими протиріччя між наявністю ґрунтовних теоретичних наукових доробок з проблем компетентнісного підходу та відсутністю шляхів його реалізації у шкільній практиці; між цілями й завданнями математичної освіти, спрямованими на формування системних знань, інтелектуальний розвиток, активізацію пізнавальної діяльності учнів, на формування в них ключових і математичних компетентностей та недостатнім методичним забезпеченням, відсутністю конкретних методичних рекомендацій необхідних для розв’язування цих завдань. Все це зумовлює актуальність наукового обґрунтування засобів реалізації вищезазначених змін у шкільній математичній освіті.

Важливим кроком упровадження компетентнісного підходу в навчання математики є конкретизація існуючих загальних положень на рівні навчальних предметів та навчальних тем в основній і старшій школі.

Однією з основних змістових ліній шкільного курсу алгебри і початків аналізу є лінія рівнянь і нерівностей, яка має розгалужену систему внутрішньопредметних (з іншими лініями курсу) та міжпредметних зв’язків. Тому традиційно рівняння і нерівності широко представлені в завданнях державної підсумкової атестації та зовнішнього незалежного оцінювання з математики. Проте результати виконання цих завдань в останні роки суттєво погіршилися (наприклад, і в 2008, і в 2009 роках учням пропонувалися найпростіші логарифмічні нерівності виду $\log_a d < (>) \log_a x$), які правильно розв'язали не більше 17% учнів). Це робить актуальною проблему удосконалення методики навчання старшокласників розв'язуванню рівнянь та нерівностей з позицій компетентнісного підходу.

Аналіз актуальних досліджень. Питанням впровадження компетентнісного підходу в математичну освіту присвячені праці І. М. Аллагулової [1], Л. І. Зайцевої [4], С. А. Ракова [7], Н. Г. Ходирєвої [8], О. В. Шавальової [9] та інших. Зазначений цикл досліджень охоплює питання, пов'язані із визначенням основних математичних компетентностей та напрямів їх набуття, формуванням математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу з використанням інформаційних технологій; формуванням елементарної математичної компетентності старших дошкільників; підготовкою майбутніх учителів до формування математичних компетентностей учнів; реалізацією компетентнісного підходу в процесі математичної підготовки студентів медичних коледжів. Зокрема, С. А. Раков означає математичну компетентність як «уміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, вміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати одержані результати, оцінювати похибку обчислень» [7, 15]. Проте питання реалізації компетентнісного підходу при вивченні окремих розділів чи змістових ліній шкільного курсу математики досі є майже не дослідженим.

Мета статті – розкрити методичні аспекти формування логічної та дослідницької математичних компетентностей старшокласників у процесі вивчення рівнянь та нерівностей.

Виклад основного матеріалу. Компетентнісний підхід до навчання математики реалізовано в програмах з математики старшої школи [6]. Аналіз цих програм та врахування загальних принципів реалізації компетентнісного підходу до навчання дозволив виділити такі предметно-галузеві математичні компетентності учня.

Процедурна компетентність – володіння методами розв'язування типових математичних задач.

Конструктивно-графічна компетентність – здатність будувати математичні моделі практичних ситуацій, використовуючи аналітичні або графічні об'єкти.

Логічна компетентність – володіння дедуктивним методом доведення та спростування тверджень.

Дослідницька компетентність – володіння передбачуваними програмою та Державним стандартом базової і повної загальної середньої освіти математичними методами дослідження практичних задач.

Теоретичний аналіз і результати експериментального навчання засвідчили, що всі математичні компетентності взаємопов'язані. Відповідно у процесі вивчення рівнянь та нерівностей, як і будь-якої іншої змістової лінії курсу алгебри та початків аналізу, в учнів формуються практично всі математичні компетентності. Разом з тим для підвищення ефективності навчання алгебри та початків аналізу доцільно при організації навчання на кожному уроці акцентувати увагу вчителя на формуванні тієї компетентності, на яку першочергово спрямована відповідна навчальна діяльність. Зупинимося більш детально на питанні формування логічної та дослідницької компетентностей.

Для набуття учнями логічної та дослідницької компетентностей при вивченні рівнянь та нерівностей доцільно організовувати діяльність учнів зі складання планів розв'язування рівнянь та нерівностей, реалізації складеного плану, аналізу одержаних результатів; розв'язувати з учнями усні вправи, спрямовані на розвиток їх логічного мислення та математичного мовлення; розв'язувати з учнями прикладні задачі, математичними моделями яких є тригонометричні, ірраціональні, показникові та логарифмічні рівняння; організовувати пошуково-дослідницьку роботу (навчальні дослідження) учнів під час вивчення рівнянь і нерівностей з параметрами, систем рівнянь і нерівностей.

Оскільки робота, спрямована на формування в учнів вміння обґрунтовувати правильність виконання рівносильних перетворень, правильність дій при одержанні рівнянь і систем-наслідків, при використанні властивостей функцій для розв'язування рівнянь та нерівностей була описана у статті [3], то зупинимося на кожному з інших наведених вище напрямів навчальної роботи.

Наведемо приклади завдань для усного розв'язування, що сприяють набуттю учнями логічної компетентності. Ці завдання виконують розвивальну функцію, можуть використовуватися з метою закріплення вмінь, навичок та з метою контролю. У той же час подібні завдання не потребують громіздких розрахунків, їх розв'язування складається з 2–3 логічних кроків, вони привчають учнів аналізувати умову завдання та враховувати властивості функцій, що входять до рівняння (нерівності), перш ніж переходити до його розв'язування.

1. Розв'яжіть рівняння: $\sqrt{x-4}+x^2=\sqrt{3-x}-3$. Учні помічають, що ОДЗ заданого рівняння – порожня множина, отже воно не має коренів.

2. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+6}=6$ (завдання з четвертої частини державної підсумкової атестації з математики). Учні обґрунтовують, що в його лівій частині стоїть зростаюча функція (як сума двох зростаючих функцій), тому це рівняння може мати тільки один корінь, який не складно підібрати (x = 10).

3. Розв'яжіть рівняння: $\sqrt{x+2}+\left|x^2-4\right|=0.$ Учні обґрунтовують, що корені заданого рівняння знаходяться серед коренів системи рівнянь: $\begin{cases}\sqrt{x+2}=0\\ \left|x^2+4\right|=0\end{cases}$, адже сума двох невід'ємних функцій дорівнює нулю лише тоді, коли кожна з цих функцій одночасно дорівнює нулю. Учні легко знаходять розв'язок системи $x=-2.$

Зупинимося на питанні посилення прикладної спрямованості навчання при розв'язуванні рівнянь та нерівностей. Нами розроблено систему прикладних задач (понад 70), які в залежності від дидактичних цілей, що ставляться вчителем, можна використовувати на різних етапах уроку (наприклад, при введенні нових понять), а також у самостійній роботі учнів. Наведемо кілька прикладів (більш детально питання використання прикладних задач у процесі вивчення рівнянь та нерівностей нами розглянуто у [2]).

Задача 1. По прямому шосе рухається автобус зі швидкістю 16 м/с. Попереду руху автобуса в полі, на відстані 60 м від шосе та 400 м від автобуса, перебуває людина, яка може бігти зі швидкістю 4 м/с. В якому напрямку вона повинна бігти, щоб встигнути «перехопити» автобус?

Розв'язання. Нехай автобус знаходиться в точці А, а людина в точці В (рис. 1). Знайдемо, під яким кутом β до лінії АВ повинна бігти людина, щоб опинитися на шосе в деякій точці С до того, як там опиниться автобус або одночасно з ним. Час руху автобуса $t_1=\dfrac{AC}{v_1},$ час руху людини $t_2=\dfrac{BC}{v_2}\le t_1.$ Звідси маємо: $\dfrac{AC}{BC}\ge\dfrac{v_1}{v_2}.$ Використавши теорему синусів до трикутника АВС та врахувавши, що $\sin\alpha=\dfrac{d}{s},$ де *d* – відстань людини від шосе, а *s* – відстань людини від автобуса, маємо: $\sin\beta\ge\dfrac{v_1 d}{v_2 s}.$ Звідси отримуємо: $37°\le\beta\le 143°.$

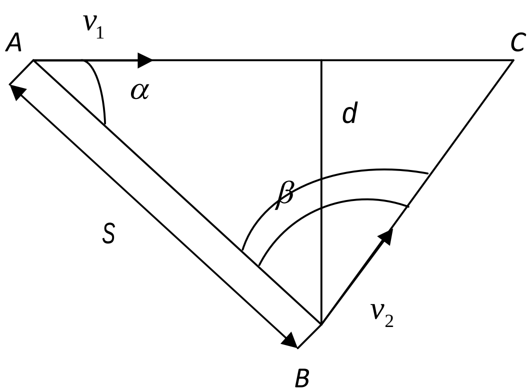

Рис. 1. Рисунок до задачі 1

Задача 2. Барабанна перетинка людини розривається, якщо рівень інтенсивності звуку $L_I = 150$ дБ. Використовуючи формулу рівня інтенсивності звуку ($L_I = 10\lg\frac{I}{I_0}$, де I_0 – поріг чутності) визначити інтенсивність звукового тиску (I), за якого може розірватись барабанна перетинка.

Розв’язання. У даному випадку для барабанної перетинки людини поріг чутності $I_0 = 10^{-12}\ Вт/м^2$. Підставивши значення L_I та I_0 одержуємо рівняння: $150 = 10\lg\frac{I}{10^{-12}}$.

Аналіз цієї задачі приводить до висновку, що існують рівняння, в яких змінна міститься під знаком логарифма, і саме такі рівняння називають логарифмічними.

Задача 3. Формула зменшення ціни приладу з часом має вигляд: $b_n = b_1(1 - 0{,}01\cdot p)^n$, де b_n – вартість приладу через *n* років, b_1 – початкова вартість приладу, *p* – відсотки, на які знижується вартість щорічно, *n* – кількість років експлуатації. Через скільки років експлуатації вартість приладу знизиться з 1000 \$ до 150 \$, якщо щорічно вона знижується на 15%?

Розв’язання. За умовою задачі маємо $\frac{150}{1000} = (1 - 0{,}15)^n$; $0{,}15 = 0{,}85^n$. Пролорагифмуємо останній вираз: $\log_{0{,}85} 0{,}15 = n$. Звідси $n \approx 11{,}7$ року.

Розглянувши питання використання прикладних задач у навчальній роботі, спрямованій на набуття учнями математичних (перш за все, логічної та дослідницької) компетентностей, зупинимося ще на одному із зазначених вище напрямів цієї роботи, а саме на питанні організації пошуково-дослідної роботи (навчальних досліджень) учнів з рівняннями, нерівностями та їх системами, що містять параметри. Оскільки рівняння та нерівності з параметрами найчастіше вимагають ретельного аналізу, то їх розв’язування дозволяє познайомитися учням із значною кількістю евристичних прийомів загального характеру, які цінні для розвитку як математичних, так і ключових життєвих компетентностей особистості.

До основних етапів організації навчального дослідження ми відносимо аналіз умови завдання (що включає постановку проблеми та складання плану розв’язування), реалізацію плану з відповідним обґрунтуванням проведеної роботи, висновок, вивчення знайденого розв’язання та аналіз його результатів. Як правило, проблема в навчальному дослідженні формулюється за допомогою вчителя (або самим вчителем). Оскільки найчастіше формування висновку здійснюється також, в більшій чи меншій мірі, за допомогою вчителя, то основна евристична діяльність учня пов’язана, на наш погляд, з побудовою плану розв'язування.

Проаналізувавши структуру навчальних досліджень та основні прийоми розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами, ми виділили аналітичні та графічні навчальні дослідження учнів при розв'язуванні рівнянь та нерівностей з параметрами.

В основі аналітичних навчальних досліджень лежить використання основних методів розв'язування рівнянь та нерівностей з параметрами, до яких ми відносимо використання рівносильних перетворень, використання властивостей функцій та використання рівнянь-наслідків. В основі графічних навчальних досліджень лежить використання графічного методу розв'язування рівнянь та нерівностей з параметрами. Наведемо приклади аналітичного та графічного навчальних досліджень.

Приклад 1. Знайти всі значення параметра *a*, при яких рівняння $3\sqrt{x+2}=2x+a$ має корені.

Аналіз умови завдання та пошук плану розв'язування. Необхідно вибрати один із загальних методів та конкретних прийомів розв'язування задачі. Учні вибирають метод використання рівносильних перетворень та обґрунтовують можливість зведення даного рівняння до квадратного. Це можна зробити використавши прийом заміни змінної ($t=\sqrt{x+2},$ де $t\geq 0;$ тоді $x=t^2-2$).

Реалізація плану розв'язування. Учні виконують заміну та обґрунтовують, що отримане в результаті заміни квадратне рівняння $2t^2-3t-4+a=0$ (1) рівносильне заданому при $t\geq 0,$ де $t=\sqrt{x+2}.$ Отже, замість дослідження заданого рівняння можна досліджувати одержане, але при цьому дещо змінюється вимога задачі: знайти всі значення параметру *a*, при яких рівняння (1) має хоча б один невід'ємний корінь. Щоб пояснити необхідність зміни вимоги, можна запропонувати учням розглянути випадки, коли рівняння (1) має два корені, наприклад, $t_1=-1;$ $t_2=-3.$ Тоді, виконавши обернену заміну, одержуємо рівняння $\sqrt{x+2}=-1$ та $\sqrt{x+2}=-3,$ які не мають коренів. Тобто наявність коренів у рівняння (1) ще не гарантує їх наявність у заданого рівняння.

На наступному етапі навчальна дослідницька діяльність учнів пов'язана із врахуванням випадків, за яких виконується вимога задачі. Таких випадків три: 1) один із коренів дорівнює нулю; 2) рівняння має один додатній та один від'ємний корені; 3) обидва корені додатні.

Розглянемо кожен із цих випадків. 1) якщо $t = 0$, то маємо $-4 + a = 0,$ звідки $4 = a;$ 2) умовою того, що рівняння має один додатній та один від'ємний корені, є виконання нерівності: $f(0) < 0.$ Отже, $-4 + a < 0,$ звідки $a < 4;$ 3) умовою того, що обидва корені додатні, є виконання системи нерівностей $\begin{cases} f(0) > 0 \\ Д \geq 0 \\ t_0 > 0 \end{cases},$ де $t_0 = -\dfrac{b}{2a}.$

Тож маємо: $\begin{cases} -4 + a > 0 \\ 41 - 8a \geq 0. \\ \dfrac{3}{4} > 0 \end{cases}$ Звідки $\begin{cases} a > 4 \\ a \leq 5\dfrac{1}{8}. \end{cases}$ Тобто $4 < a \leq 5\dfrac{1}{8}.$

Висновок. Об'єднавши одержані результати, маємо: $a \leq 5\dfrac{1}{8}.$

Вивчення знайденого розв'язання та аналіз його результатів. Для розв'язування подібних задач корисно пам'ятати: *якщо в досліджуваному завданні з параметром використана заміна змінної, то завдання дослідження може дещо змінитися. Під час дослідження квадратного рівняння використовуються умови розміщення коренів квадратного тричлена відносно нуля.* Вчитель пропонує учням з'ясувати, чи існують інші шляхи отримання відповіді. Так, можна було б розв'язати задане рівняння, а потім дати відповідь на запитання задачі, але такий шлях потребував би значно більше часу.

Приклад 2. При яких значеннях параметру *а* рівняння $\left|2|x| - 5\right| = a - x$ має три різних розв'язки?

Аналіз умови та пошук плану розв'язування. Аналітичне розв'язування даного рівняння є досить громіздким і вимагає багато часу. Тому звернемося до графічного методу. Позначимо функції, що стоять у лівій та правій частині рівняння як $f(x) = \left|2|x| - 5\right|$ та $g(x) = a - x.$ *f(x)* не залежить від параметру *а*. Отже, треба побудувати графіки функцій *f(x)* і *g(x)* та визначити (за допомогою графіку та аналітичних міркувань), при яких значеннях параметру *а* графік функції *g(x)* має три точки перетину із графіком функції *f(x).*

Реалізація плану розв'язування. Будуємо графіки функцій *f(x)* і *g(x)* у ППЗ «GRAN1» (зрозуміло, що ці побудови можна робити і без використання комп'ютера, проте такий шлях вимагає більше часу) та змінюючи значення параметру *а* і масштаб, графіку аналізуємо скільки точок перетину має пряма $g(x) = a - x$ з графіком функції *f(x).*

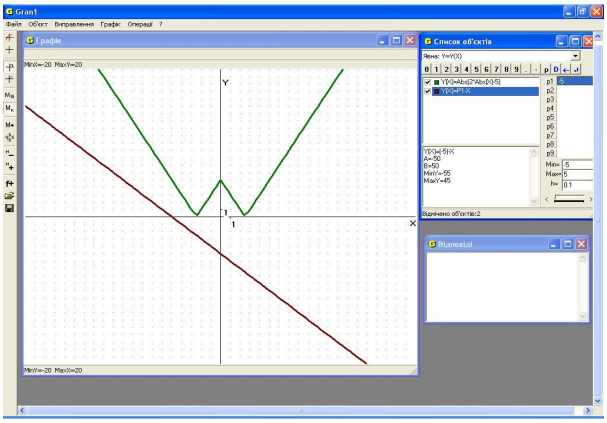
Рис. 2. Графіки функцій *f(x)* та *g(x)* при *a* = -5

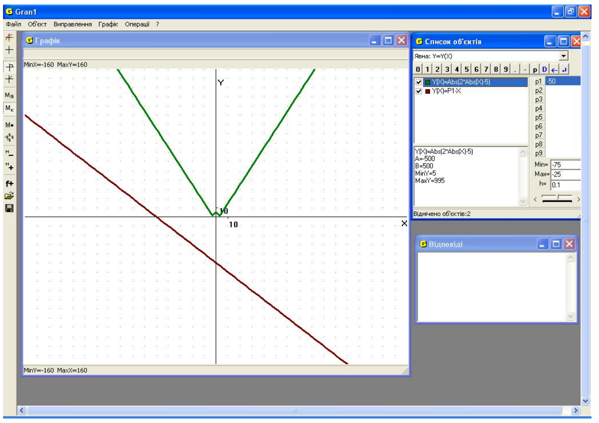
Рис. 3. Графіки функцій *f(x)* та *g(x)* при *a* = -50

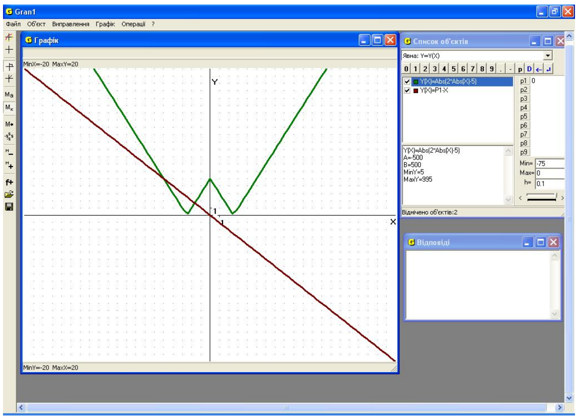
Рис. 4. Графіки функцій *f(x)* та *g(x)* при *a* = 0

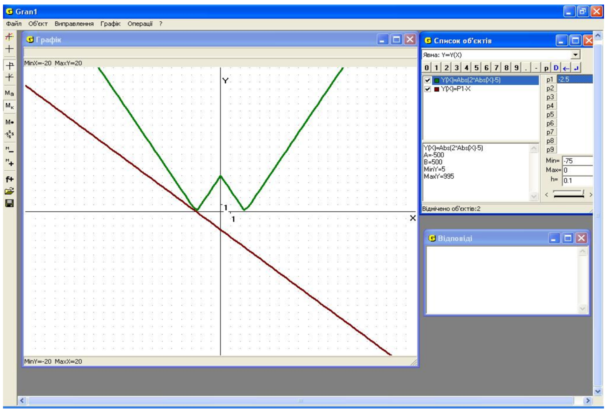
Рис. 5. Графіки функцій *f(x)* та *g(x)* при *a* = -2,5

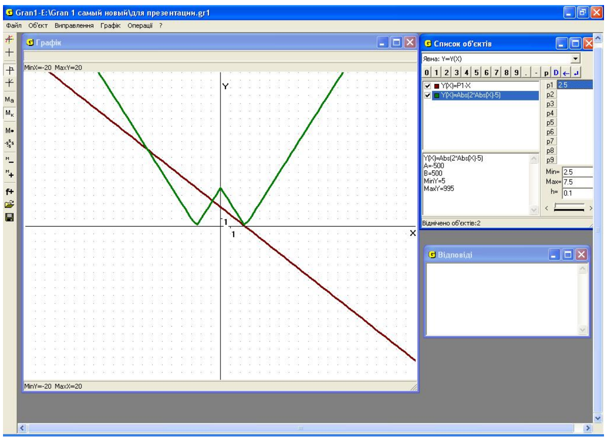
Рис. 6. Графіки функцій *f(x)* та *g(x)* при *a* = 2,5

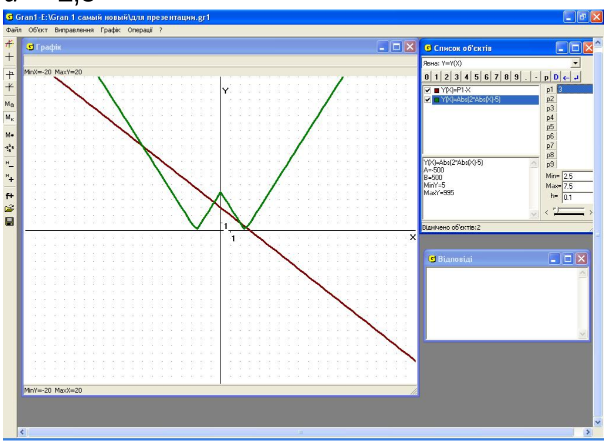
Рис. 7. Графіки функцій *f(x)* та *g(x)* при *a* = 3

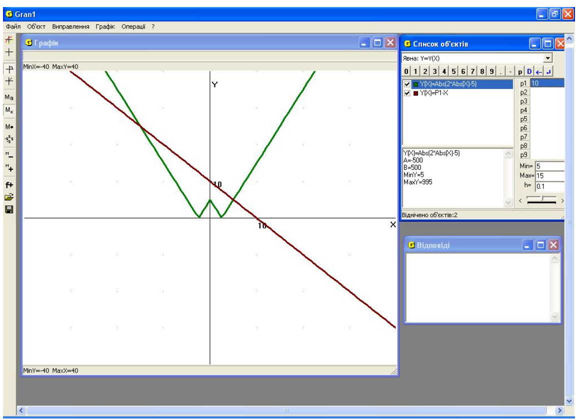
Рис. 8. Графіки функцій *f(x)* та *g(x)* при *a* = 10

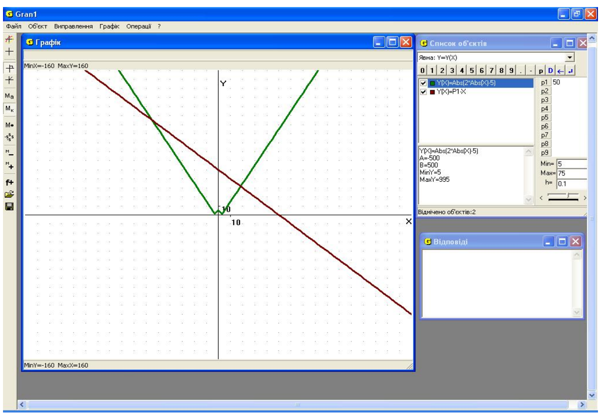
Рис. 9. Графіки функцій *f(x)* та *g(x)* при *a* = 50

Виконавши побудови при від'ємних, додатних значеннях параметру *a* та при *a* = 0 учні приходять до висновку, що три різні корені задане рівняння може мати тоді і тільки тоді, коли графік функції $g(x) = a - x$ проходить через точки (0;5) та (2,5;0) (при цьому для точного знаходження координат другої точки учні використовують аналітичні міркування). Звідси маємо *a* = 5 та *a* = 2,5.

Висновок. *a* = 5 та *a* = 2,5.

Вивчення знайденого розв'язання та аналіз його результатів. Якщо в завданні з параметрами йдеться про кількість (наявність) розв'язків рівняння (нерівності) у залежності від значення параметра, то для аналізу заданої ситуації часто зручно використовувати графічну ілюстрацію. При цьому, для того щоб уявити загальний вид графіків функцій доцільно використовувати ППЗ «GRAN1».

Висновки. Отже, для набуття учнями логічної та дослідницької математичних компетентностей в процесі навчання доцільно:

1) пропонувати учням складати плани розв'язування рівнянь й нерівностей та обґрунтовувати правильність їх реалізації;

2) при введенні поняття тригонометричних, логарифмічних та показникових рівнянь розглянути з учнями прикладні задачі, що зводяться до розв'язування цих видів рівнянь;

3) під час вивчення вищезазначених видів рівнянь розв'язувати з учнями та давати для самостійного розв'язування прикладні задачі та завдання для усного розв'язування, що стимулюють розвиток логічного мислення учнів;

4) організувати навчальні дослідження (аналітичні та графічні) учнів під час вивчення рівнянь, нерівностей і систем рівнянь з параметрами.

Як свідчать результати педагогічного експерименту, таке удосконалення методики вивчення рівнянь та нерівностей у курсі алгебри та початків аналізу сприяє набуттю учнями не лише логічної та дослідницької математичних компетентностей, але й формуванню в них здатностей складати плани своєї навчальної діяльності, аналізувати об'єкти, ситуації та взаємозв'язки, використовувати та оцінювати власні стратегії розв'язування пізнавальних проблем, висловлювати свою думку і т. ін., тобто сприяє набуттю ключових компетентностей.

Перспективи подальших пошуків у напряму дослідження. Нагальним і важливим є удосконалення методики вивчення різних розділів математики з метою формування в учнів математичних компетентностей.

ЛІТЕРАТУРА

1. Аллагулова И. Н. Формирование математической компетентности старшеклассника в образовательном процессе : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.01 / Аллагулова Ирина Николаевна. – Оренбург, 2007. – 190 с.

2. Ачкан В. В. Прикладні задачі як засіб формування математичних компетентностей учнів у процесі вивчення рівнянь і нерівностей в курсі алгебри та початків аналізу / В. В. Ачкан // Математика в школі. – 2009. – № 1, 2. – С. 31–34.

3. Ачкан В. В. Формування процедурної компетентності старшокласників у процесі вивчення рівнянь та нерівностей / В. В. Ачкан // Збірник наукових праць Бердянського державного педагогічного університету (Педагогічні науки). – № 4. – Бердянськ : БДПУ, 2007. – С. 138–144.

4. Зайцева Л. І. Формування елементарної математичної компетентності в дітей старшого дошкільного віку : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.08 / Зайцева Лариса Іванівна. – К., 2005. – 215 с.

5. Наказ МОН України від 05.05.2008 № 371 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : www.mon.gov.ua/laws/MON_371_08.doc.

6. Математика. Програми для 10–11 класів [Електронний ресурс]. – Режим доступу : www.mon.gov.ua/main.php?query=education/average/prog12.

7. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ : [монографія] / С. А. Раков. – Х. : Факт, 2005. – 360 с.

8. Ходырева Н. Г. Методическая система становления готовности будущих учителей к формированию математической компетентности школьников : автореф. дис. на соискание науч. степени канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теория и методика обучения и воспитания (математика)» / Н. Г. Ходырева. – Волгоград, 2004. – 23 с.

9. Шавальова О. В. Реалізація компетентнісного підходу у математичній підготовці студентів медичних коледжів в умовах комп'ютеризації навчання : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : 13.00.02 «Теорія і методика навчання математики» / О. В. Шавальова. – К., 2007. – 20 с.

РЕЗЮМЕ

В. В. Ачкан. Формирование логической и исследовательской математических компетентностей старшеклассников в процессе изучения уравнений и неравенств.

В статье раскрыты методические аспекты формирования логической и исследовательской математических компетентностей старшеклассников в процессе изучения уравнений и неравенств. Приведены пути и средства их формирования.

Ключевые слова*: математические компетентности, уравнения и неравенства, старшая школа.*

SUMMARY

V. Achkan. Forming of senior pupils' logical and research mathematical competences during the process of studying equatations and inequalities.

The article displays the methodical aspects of forming logical and research mathematical competences of senior pupils in the process of studying equatations and inequalities. Here are given the quays of gaining these competences and are offered the methods of their forming.

Key words: mathematical competences, equatations and inequalities, senior school.