

## **МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «ФЕРМИ-ГАЗЫ» В СИСТЕМЕ ПОДГОТОВКИ УЧИТЕЛЯ ФИЗИКИ**

Мороз И.А.

*Сумский государственный педагогический университет  
имени А.С.Макаренко (Украина)*

*Рассматривается методика преподавания вопроса о свойствах ферми-газов и поведении электронного газа в металлах при разных температурах. Оценивается энергия Ферми и максимальная скорость электронов при абсолютном нуле температуры. Объясняется вклад электронного газа в теплоемкость металлов и зависимость теплоёмкости от температуры.*

*Ключевые слова: фермионы, энергия Ферми, теплоемкость, распределение Ферми-Дирака, химический потенциал, кристаллическая решетка.*

Развитие современной квантовой физики, от освоения которой в значительной степени зависит развитие современного физического мировоззрения и интеллектуальных умений студентов, началось с решения противоречий между экспериментальными фактами и теоретическими представлениями классической физики, которые возникли на рубеже XIX и XX веков. В физическом и математическом смысле вопрос о решения указанных противоречий является достаточно сложными. Поэтому методическое обоснование этих вопросов в научной и учебной литературе и лекционной практике требует особенного внимания и поисков новых путей и методических приемов доведения к сведению студентов всех тонкостей, которые сопровождают изложение соответствующих тем.

Анализ учебной и методической литературы показывает [1-3], что вопрос о сопоставлении классической и квантовой статистик и объяснение, связанных с ними, противоречий рассматривается из слишком общих позиций, что усложняет их понимание и дальнейшее использование.

Поэтому в данной работе, на основе теоретического, методического и онтодидактического анализа учебно-методической литературы по вопросам статистической физики рассматривается авторская методика [4] освещения в курсе теоретической физики вопросов о свойствах ферми-газов и вкладе электронного газа в теплоемкость металлов.

Как известно, во второй половине XIX века получила бурное развитие электронная теория металлов. Согласно этой теории, в узлах кристаллической решетки металла находятся атомы, которые осуществляют гармонические колебания. Поскольку валентные электроны в металлах слабо связаны с ядром атомов, то они при действии тепловых столкновений покидают свой атом и становятся коллективизированными, так что в узлах решетки в действительности всегда находятся положительные ионы. Валентные электроны, которые покинули свой атом, взаимодействуют между собой и с ионами решетки, и это взаимодействие практически взаимно компенсируется. Поэтому коллективизированные электроны образуют электронный газ, который, из-за указанной компенсации взаимодействия, можно рассматривать как идеальный газ и, естественно, можно (с классической точки зрения) описывать всеми законами справедливыми для идеального газа.

Такое представление оказалось очень плодотворным и позволило не только получить известные законы Ома и Джоуля-Ленца, объяснить высокую тепло- и электропроводимость металлов, но и доказать опытный закон Видемана-Франца, согласно которому отношение коэффициента теплопроводности к коэффициенту электропроводности пропорционально температуре и не зависит от рода металла. Однако, по электронной теории сопротивление проводников должно быть пропорционально корню квадратному из температуры  $\sqrt{T}$ , но опыт убедительно говорит о том, что сопротивление пропорционально  $T$ .

Опытным путем был установленный закон Дюлонга-Пти, согласно которому молярная теплоемкость кристаллов равняется  $3R$ . Это значение

хорошо согласуется с классической теорией теплоемкости. Более детальные экспериментальные исследования показали, что теплоемкость кристаллов зависит от температуры. При снижении температуры, начиная с некоторой, характерной для данных кристаллов, теплоемкость начинает уменьшаться пропорционально  $T^3$ , а при очень низких температурах у металлических кристаллов ( $<3$  К) пропорционально  $T$ . Для объяснения этой температурной зависимости Эйнштейн, а затем Дебай использовали квазиклассический подход, основанный на использовании известной формулы Планка, и результаты их расчета в основном совпали с экспериментом. Однако, как и в классической теории, в теориях Эйнштейна и Дебая не рассматривается внос в теплоемкость металлов свободных электронов, что было абсолютно не оправдано. Ведь, например, для одновалентных металлов количество свободных электронов равно количеству ионов. И поскольку это свободные частицы, то их необходимо рассматривать как классические. Тогда они должны дать свой внос в теплоемкость как одноатомный классический идеальный газ и теплоемкость металлов при достаточно высоких температурах должна быть не  $3R$ , а  $4,5R$ . Ни классический подход, ни квазиклассический Эйнштейна и Дебая, которые учитывали дискретность энергетического спектра частиц, не могли объяснить, почему не нужно учитывать электронную теплоемкость в металлах. Было также не ясно, почему при очень низких температурах теплоемкость металлов пропорциональна  $T$ , тогда как теория Эйнштейна давала экспоненциальную зависимость, а более точная теория Дебая - кубическую.

В 1928 году Зоммерфельд показал, что если применить к электронному газу статистику, разработанную итальянским физиком Ферми для газов с полуцелым спином (ферми-газы), то указано выше противоречие с теплоемкостью и электрическим сопротивлением металлов легко объясняется.

Единственный ферми-газ, который является вырожденным при обычных температурах ( $<10000$ ), это электронный газ в металлах. Поэтому описание

свободных электронов в металлах с помощью распределения Ферми-Дирака и сравнения результатов с экспериментальными данными, с одной стороны - служит критерием правильности теории, а из другой - должно вывести из тупиковой ситуации, которая сложилась в электронной теории металлов при объяснении температурной зависимости парамагнетизма свободных электронов, электропроводимости металлов и вклада электронного газа в теплоемкость металлов.

Согласно современным представлениям, металлические кристаллы можно рассматривать как систему, которая состоит из кристаллической решетки, в узлах которой находятся (точнее - колеблются) положительные ионы, и свободных электронов, которые двигаются в межузельном пространстве. Понятно, что в действительности электроны не совсем свободны, напротив, они взаимодействуют с кристаллической решеткой. Энергия этого кулоновского взаимодействия (отрицательная за знаком, так как действуют силы притягивания) имеет минимальное (по абсолютной величине) значение между узлами и - максимальное - в точках, которые отвечают узлам решетки. Следовательно, силовое поле, в котором двигаются коллективизированные электроны, является периодическим. Причем максимумы и минимумы потенциальной энергии находятся на очень малых расстояниях (порядку  $10^{-8}$  см) один от другого, и электрон, который прошел относительно малый путь в кристалле (например, 1 см), пересекает область максимумов и минимумов потенциальной энергии огромное количество раз. Поэтому такое силовое поле в первом приближении можно заменить полем с некоторой средней потенциальной энергией внутри кристалла, значение которой не позволяет электронам вылетать из поверхности кристалла наружу пока их кинетическая энергия не будет больше абсолютной величины этой усредненной потенциальной энергии, постоянной по всему кристаллу. Таким образом, в таком приближении дискретное расположение ионов, заменяется сплошным положительным зарядом, равномерно расположенным по всему кристаллу, и при движении электрон не производит работы, то есть свободно

двигается внутри кристалла. Такая модель металлического кристалла позволяет отдельно рассматривать движение ионов и движение свободных электронов. Тепловое движение ионов ничем не отличается от хорошо изученного движения атомов в неметаллических кристаллах, потому что при рассмотрении металлических кристаллов достаточно рассмотреть лишь свойства и движение свободных электронов. Такая упрощенная модель металлических кристаллов, как будет видно из дальнейшего рассмотрения, позволяет получить теоретические результаты, которые хорошо согласуются с экспериментом.

Как отмечалось раньше, электронный газ, который образовался в результате коллективизации валентных электронов, можно рассматривать как идеальный. Поэтому энергия свободных электронов зависит лишь от интенсивности движения и связана с импульсом соотношением  $\epsilon = mv$ . Здесь под  $m$  нужно понимать эффективную массу электрона, которая может быть как больше, так и меньше массы покоя электрона.

Как показывают простые расчеты, отношения концентраций даже электронного газа в одновалентном металле отличается концентрации

обычных газов на три порядка:  $\frac{n_e}{n_0} \approx 2 \cdot 10^3$ . Если учесть также малую массу

электронов, то становится очевидным, что известный критерий вырождения выполняется для электронного газа до чрезвычайно высоких температур:  $\sim 60000\text{K}$ . Поэтому электронный газ в металлах нужно рассматривать лишь на основе статистики Ферми-Дирака, в которой среднее количество частиц  $n$  на некотором произвольном энергетическом уровне  $\epsilon_i$  равно:

$$n = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_i - \mu}{kT}} + 1}, \quad (\text{I})$$

где  $\mu$  - химический потенциал,  $T$  - температура,  $k$  - постоянная Больцмана.

Рассмотрим сначала свойства электронного газа в предельном случае  $T \rightarrow 0$ . Из выражения (I) следует, что при такой температуре  $n = 1$  для всех

уровней энергии  $\varepsilon_i < \mu$  и  $n = 0$ , если  $\varepsilon_i > \mu$ . Это значит, что химический потенциал имеет смысл максимальной энергии, которую могут иметь

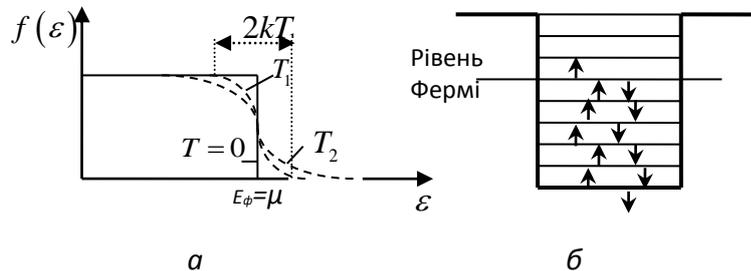


Рис. 1. График распределения Ферми (а) при  $T=0$  – сплошная кривая и - при температурах  $T_1$  и  $T_2 > T_1$  – штриховые кривые и заполнение энергетических уровней свободными электронами (б)

электроны при 0K. Эту энергию называют энергией Ферми.

График распределения Ферми при  $T \rightarrow 0$  будет иметь вид, изображенный на рис. 1, а (сплошная линия).

Фермионы подчиняются принципу Паули. Поэтому на каждом уровне могут находиться лишь 2 электрона, которые отличаются ориентацией спина. Следовательно, лишь 2 электрона могут находиться на нулевом уровне, все остальные электроны попарно заполняют возбужденные уровни (рис. 1, б).

Максимальная энергия, которую могут иметь электроны при абсолютном нуле температуры, как отмечалось, называется энергией Ферми  $E_\phi$  (этой

энергии отвечает максимальный импульс:  $E_\phi = \frac{p_m^2}{2m}$ ). Энергию Ферми и

связанный с ней максимальный импульс можно рассчитать, используя условие нормировки для количества частиц. Действительно, поскольку при

абсолютном нуле температуры все электроны попарно занимают все уровни энергии (квантовые состояния) от нулевого до уровня  $E_\phi$ , то общее

количество свободных электронов просто равно удвоенному количеству квантовых состояний. Для подсчета последних, учтем то, что уровни энергии

макроскопических систем расположены квазинепрерывно. Поэтому можно найти количество электронов в объеме  $dV$ , которые имеют импульс в

интервале от  $p$  до  $p+dp$  следующим образом:

$$dN = 2 \frac{1}{h^3} d\Gamma_p \cdot d\Gamma_q = 2 \frac{4\pi p^2 dp dV}{h^3}. \quad (\text{II})$$

Здесь учтено, что в каждом квантовом состоянии могут быть 2 электрона, которые отличаются направлением спина. Поэтому общее количество электронов в объеме  $V$  будет равно:

$$N = \frac{8\pi V}{h^3} \int_0^{p_m} p^2 dp = \frac{8\pi V}{h^3} \frac{p_m^3}{3} = \frac{8}{3} \frac{\pi V}{h^3} (2m\varepsilon_F)^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{III})$$

Из этого выражения видно, что энергия Ферми и максимальный импульс

$$\varepsilon_F = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{N}{V} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad p_m = h \left( \frac{3N}{8\pi V} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{IV})$$

зависят лишь от концентрации электронов, которую можно легко рассчитать в каждом металле и оценить энергию Ферми (и максимальный импульс). Так, например, для серебра она равна  $\sim 5,5\text{eV}$ . Используя это значение максимальной энергии электронов, оценим их максимальную скорость при абсолютном нуле температуры:

$$\varepsilon_F = \mu = \frac{mV_0^2}{2} \Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{2\varepsilon_F}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,5 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} \approx 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Получаем неожиданный вывод: скорости свободных электронов даже при абсолютном нуле огромны. Но эти скорости нельзя путать со скоростью теплового движения -  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ , которая при такой температуре равна нулю.

Энергию всего электронного газа в объеме  $V$  при абсолютном нуле температуры найдем, если выражение (II) умножим на  $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$  и выполним интегрирование по всеми импульсами от 0 к  $p_{\text{max}}$ :

$$E = \frac{4\pi V}{h^3 m} \int_0^{p_m} p^4 dp = \frac{4\pi V}{mh^3} \frac{p_m^5}{5} = \frac{16\sqrt{2}}{5} \frac{\pi V m^{\frac{3}{2}}}{h^3} (\varepsilon_F)^{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5} N \varepsilon_F, \quad (\text{V})$$

Свободные электроны, двигаясь хаотически внутри металла, осуществляют давление на поверхность кристалла. Поскольку при абсолютном нуле энтропия имеет постоянное (нулевое) значение, то

давление можно определить как производную от полной энергии (V) по температуре  $\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S = -p$ . Выполнив это дифференцирование, получим:

$$p = \frac{h^2}{20m} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{5}{3}}. \quad (\text{VI})$$

При повышении температуры выше  $T = 0$  электроны, которые находятся на уровнях далеких от уровня Ферми (см. рис. 1, б) не могут переходить на уровень, более высокий  $\varepsilon_F = \mu$ , поскольку для этого нужна большая энергия. Поэтому на высшие уровни будут переходить лишь электроны из уровня Ферми и уровней, которые находятся вблизи уровня Ферми, для которых тепловая энергия  $kT$  больше разницы энергии соответствующих уровней. Таким образом, распределение Ферми будет размываться вблизи уровня Ферми. На рис. 1, а это изображено штриховыми линиями. Таким образом, делаем вывод, что в тепловом движении участвуют лишь электроны, которые находятся на энергетических уровнях в интервале  $\varepsilon_F - kT < \varepsilon < \varepsilon_F + kT$  и только эти электроны влияют на свойства металлов. Поэтому только они будут давать вклад в теплоемкость металлов. Напомним, что теплоемкость электронного газа по классической теории должна быть  $\frac{3}{2}R$ , что никак не согласуется с опытом.

Используя распределение Ферми, оценим электронную теплоемкость металлов. Для этого определим количество электронов, которые участвуют в тепловом движении при температуре  $T$ , то есть находятся в энергетической зоне  $\varepsilon_F - kT < \varepsilon < \varepsilon_F + kT$ :

$$\Delta n = 2 \frac{1}{h^3} \int_{\mu-kT}^{\mu+kT} \frac{d\Gamma_p d\Gamma_q}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} + 1} = \frac{8\pi V}{h^3} \int_{\mu-kT}^{\mu+kT} \frac{p^2 dp}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} + 1}.$$

Учтем, что в модели свободных электронов, которую мы используем,

$$p^2 = 2m\varepsilon, \quad dp = \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}} d\varepsilon, \quad \text{потому имеем:}$$

$$\Delta n = \frac{8\sqrt{2}m^{3/2}\pi V}{h^3} \int_{\frac{\mu-kT}{kT}}^{\frac{\mu+kT}{kT}} \frac{\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} + 1}. \quad (\text{VII})$$

Поскольку, интервал размывки функции распределения малый (рис. 1, *a*), то значение интеграла в правой части последнего выражения можно оценить приблизительно, используя, известную из математики, теорему о среднем:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\langle f(x) \rangle.$$

Поэтому (в таком приближении) можно считать, что:

$$\Delta n \approx \frac{8\sqrt{2}m^{3/2}\pi V}{h^3} kT \sqrt{\varepsilon_\phi}. \quad (\text{VIII})$$

Сравнивая с полученным раньше выражением (III) для нормировки количества электронов, находим относительное число электронов, которые участвуют в тепловом движении:

$$\frac{\Delta n}{N} = \frac{3}{2\pi} \frac{kT}{\varepsilon_F}. \quad (\text{IX})$$

Оценим относительное число свободных электронов в одном моле, которые участвуют в тепловом движении при температуре  $T=300\text{K}$  для серебра ( $E_\phi = 8,5 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ ):  $\frac{\Delta n}{N_A} = \frac{3}{2\pi} \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{8,5 \cdot 10^{-19}} \approx 10^{-3}$ . Поэтому понятно, что

электронная теплоемкость металлов будет не  $\frac{3}{2}R$ , а порядка  $10^{-3}R$ , то есть ее вклад, в сравнении с вкладом кристаллической решетки, является очень малым, и то, что его не учитывала ни теория Эйнштейна, ни теория Дебая, становится вполне обоснованным.

Найдем теперь прирост энергии всех электронов при нагревании металла от  $0\text{K}$  до температуры  $T$ . Будем считать, что прирост тепловой энергии каждого электрона, участвующего в тепловом движении, происходит при нагревании от  $0\text{K}$  до  $T$ , то есть энергия электронов, связанная с тепловым движением при температуре  $T$ , будет равна  $\varepsilon = kT$ . Потому внутренняя энергия всего электронного газа в одном моле одновалентного металла, который участвует в тепловом движении и дает вклад в теплоемкость,

определится следующим выражением:

$$E = kT \Delta n = N_A \frac{3}{2\pi} \frac{kT}{\varepsilon_F} kT = N_A \frac{3}{2\pi} \frac{k^2 T^2}{\varepsilon_F}.$$

Можем теперь оценить теплоемкость электронного газа, например, в серебре:  $C = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = \frac{6}{2\pi} \frac{k^2 T N_A}{\varepsilon_F} = \frac{6 \cdot (1,38 \cdot 10^{-23})^2 \cdot 300 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{2\pi \cdot 8,5 \cdot 10^{-19}} = 0,039 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$

Таким образом, в серебре теплоемкость электронного газа составляет меньше 1% от величины  $\frac{3}{2}R$ , которую определяет классическая теория теплоемкости для одновалентного металла.

Кроме того, даже такой нестрогий подсчет дает линейную зависимость  $C_V$  от  $T$ , что совпадает с экспериментом при очень низких температурах для суммарной теплоемкости решетки и электронного газа. Действительно, как отмечалось раньше, теплоемкость решетки изменяется по закону  $c \sim T^3$ . При низких температурах ход решеточной и электронной теплоемкости  $c \sim T$  схематически показано на рис. 2. При  $T < T_1$  вклад электронов превышает

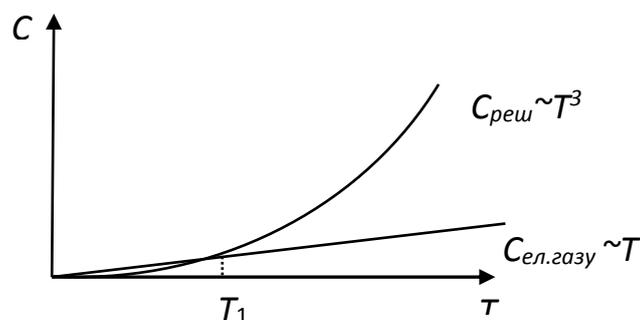


Рис. 2. Схематическая зависимость теплоемкости решётки и свободных электронов от температуры в металлах

вклад решетки, потому в экспериментах и наблюдается линейная зависимость, и, как того требует третий закон термодинамики, при  $T \rightarrow 0$ ,  $C_V \rightarrow 0$ . Можно приравнять теплоемкость решетки и теплоемкость электронного газа и определить таким образом температуру  $T_1$ , ниже которой

электронная теплоемкость становится больше, чем теплоемкость решетки и сравнить ее с экспериментом. Соответствующие расчеты показывают, что эти температуры для разных металлов ниже  $3K$ , что хорошо согласуется с экспериментом.

#### Выводы.

1. Учет всех квантовых свойств электронов позволил разрешить одно из серьезных противоречий классической теории и эксперимента. Можно также показать, что использование статистики Ферми-Дирака для свободных электронов в проводниках дает правильную ( $\sim T$ ) зависимость электросопротивлению металлов и парамагнетизма свободных электронов от температуры.

2. Рассмотренная методика изложения вопроса о вкладе электронного газа в теплоемкость металлов охватывает все ключевые аспекты этого вопроса, не содержит избыточную информацию и математические осложнения и потому, как показывает собственный опыт преподавания теоретической физики, достаточно легко воспринимается студентами.

#### Литература

1. Ансельм А.И. Основы статистической физики и термодинамики. / Ансельм А.И. - М.: Наука, 1973. - 424с.
2. Булавін Л. А. Молекулярная физика. / Булавін Л. А., Гаврюшенко Д.А., Сисоєв В.М. - К.: Знання, 2006. - 576с
3. Ландау Л. Д. Статистическая физика. / Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М. - М.: Наука, 1964. - 568с.
4. Мороз І.О. Основы термодинамики и статистической физики. Учебное пособие. / І.О. Мороз. - Сумы: Издательство «МакДен», 2012. - 565 с.

### *Аннотация*

*Рассматривается методика преподавания вопроса о поведении электронного газа в металлах при разных температурах. Оценивается энергия Ферми и максимальная скорость электронов при абсолютном нуле температуры. Объясняется вклад электронного газа в теплоемкость металлов и зависимость теплоемкости от температуры.*

*Ключевые слова : фермионы, энергия Ферми, теплоемкость, распределение Ферми-Дирака, химический потенциал, кристаллическая решетка.*

### *Annotation*

*Methodology of teaching of question is examined about behavior of electronic gas in metals at different temperatures. Energy is estimated to Fermi and high speed of electrons at the absolute pitch of temperature. The contribution of electronic gas is explained to the heat capacity of metals and dependence of heat capacity from a temperature.*

*Keywords: fermions, energy of Fermi, heat capacity, distribution of Fermi - Dirac, chemical potential, crystalline grate.*

*Справка об авторе:*

***Мороз Иван Алексеевич,***

*научная степень - канд. техн. наук,*

*научное звание - доцент,*

*должность - профессор кафедры экспериментальной и теоретической физики*