

ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА, СИМВОЛИ $\tilde{L}$ -ЗОБРАЖЕННЯ ЯКОЇ Є ВИПАДКОВИМИ ВЕЛИЧИНАМИ З МАРКОВСЬКОЮ ЗАЛЕЖНІСТЮ

М. В. ПРАЦЬОВИТИЙ AND Ю. В. ХВОРОСТІНА

Анотація. У роботі досліджується розподіл випадкової величини

$$\theta = \frac{1}{\theta_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\theta_1(\theta_1+1) \dots \theta_{n-1}(\theta_{n-1}+1)\theta_n},$$

де (θ_n) – послідовність випадкових величин, які приймають натуральні значення і утворюють однорідний Ланцюг Маркова з початковими ймовірностями $(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots)$ і матрицею перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$, вивчається лебегівська структура (вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної компонент), тополого-метричні і фрактальні властивості спектра (мінімально замкнутого носія міри).

Анотация. В работе исследуется распределение случайной величины

$$\theta = \frac{1}{\theta_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\theta_1(\theta_1+1) \dots \theta_{n-1}(\theta_{n-1}+1)\theta_n},$$

где (θ_n) – последовательность случайных величин, которые принимают натуральные значения и образуют однородную цепь Маркова с начальными вероятностями $(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots)$ и матрицей переходных вероятностей $\|p_{ik}\|$, изучается его лебеговская структура (содержимое дискретной, абсолютно непрерывной та сингулярной компонент), тополого-метрические и фрактальные свойства спектра (минимально замкнутого носителя меры).

ABSTRACT. In the paper we consider the distributions of random variables

$$\theta = \frac{1}{\theta_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\theta_1(\theta_1+1) \dots \theta_{n-1}(\theta_{n-1}+1)\theta_n},$$

where (θ_n) is a sequence of random variables taking the values of positive integers to form a homogeneous Markov chain. Consider the Markov chain with initial probability $(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots)$ and with transition matrix $\|p_{ik}\|$. We study Lebesgue structure of this distribution, topological, metric and fractal properties of the spectra of distribution (a minimal closed support of distribution).

ВСТУП

Нагадаємо [7], що $\tilde{L}$ -зображенням дійсного числа $x \in (0; 1]$ називається символічний (скорочений) запис $x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{\tilde{L}}$, де $a_n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, його розвинення в знакопозначений ряд Люрота [1], [2]:

$$x = \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1) \dots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n} \equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{\tilde{L}}$$

Ключові слова і фрази. Знакопозначений ряд Люрота; $\tilde{L}$ -зображення; випадкова величина; розподіл суми ряду Люрота, елементи якого є випадковими величинами з марковською залежністю; лебегівська структура розподілу; сингулярний розподіл з аномально фрактальним спектром.

або $x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_k}^{\tilde{L}}(0)$, коли x має скінченний розклад

$$x = \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^k \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1) \dots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n} \equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_k}^{\tilde{L}}(0).$$

Критерієм раціональності числа у його $\tilde{L}$ -зображенні є наступне твердження [1]: *дійсне число $x \in (0, 1]$ є раціональним тоді і тільки тоді, коли його $\tilde{L}$ -зображення є скінченним або періодичним.* По аналогії з s -ково-раціональними та s -ково-іrrаціональними числами [6], ті раціональні числа, які мають нескінченне $\tilde{L}$ -зображення називатимемо $\tilde{L}$ -іrrаціональними, а ті, які мають скінченне $\tilde{L}$ -зображення, – $\tilde{L}$ -раціональними. Кожне $\tilde{L}$ -раціональне число має два формально різних зображення

$$\Delta_{a_1 a_2 \dots a_{k-1}}^{\tilde{L}}(0) = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_{k-2} [a_{k-1}+1]}^{\tilde{L}}(0),$$

$\tilde{L}$ -іrrаціональні числа мають єдине зображення. Тому для $\tilde{L}$ -іrrаціональних чисел k -тий символ (цифра) $a_k = a_k(x)$ $\tilde{L}$ -зображення є функцією числа, що зображається.

У теорії чисел загальноновживаними є терміни двійково-раціональне (більш загальне: s -ково-раціональне) число та двійково-іrrаціональне (s -ково-іrrаціональне) число. Перше має два зображення, одне з яких має період (0). Поняття $\tilde{L}$ -раціонального та $\tilde{L}$ -іrrаціонального введені за аналогією.

Зауважимо, що $\tilde{L}$ -зображення і зображення чисел елементарними ланцюговими дробами мають спільну топологію, але принципово різні метричні теорії.

L -зображення чисел [4], яке ґрунтується на представленні чисел знакододатними рядами Люрота (вперше описане в [2]), і $\tilde{L}$ -зображення мають однакоє основне метричне відношення, а тому – аналогічні метричні теорії, але різну топологію.

У нашій попередній роботі [3] досліджувалися властивості розподілу випадкової величини

$$\xi = \frac{1}{\eta_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\eta_1(\eta_1+1) \dots \eta_{k-1}(\eta_{k-1}+1)\eta_k} \equiv \Delta_{\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k}^{\tilde{L}}$$

з незалежними елементами ($\tilde{L}$ -символами) η_k розкладів в знакозмінні ряди Люрота. Для ξ вичерпно вивчено лебегівську структуру розподілу, а саме: доведено його лебегівську чистоту та критерії належності до трьох чистих типів (дискретного, абсолютно неперервного, сингулярного); описано тополого-метричні і фрактальні властивості спектра. У даній роботі розглядається випадкова величина θ , $\tilde{L}$ -символи якої є випадковими величинами з марковською залежністю. Ми знову цікавимося лебегівською структурою її розподілу, спектральними властивостями, зокрема, фрактальними властивостями носіїв розподілу.

Нехай (θ_n) – послідовність дискретно розподілених випадкових величин, які набувають натуральних значень $1, 2, \dots, m, \dots$ і утворюють однорідний ланцюг Маркова з початковими ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_m, \dots$ і матрицею перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$, тобто

$$\begin{aligned} P\{\theta_1 = m\} &= p_m > 0, \quad \sum_{m=1}^{\infty} p_m = 1; \\ P\{\theta_{k+1} = j | \theta_k = i\} &= p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Розглядається випадкова величина θ , яка має нескінченне $\tilde{L}$ -зображення, елементи якого є випадковими величинами θ_n , тобто

$$\theta = \frac{1}{\theta_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\theta_1(\theta_1+1) \dots \theta_{n-1}(\theta_{n-1}+1)\theta_n} \equiv \Delta_{\theta_1 \theta_2 \dots \theta_n}^{\tilde{L}}.$$

Зауваження 0.1. Очевидно, що випадкова величина θ не набуває значень з множини $\mathbb{Q}'$ раціональних чисел, $\tilde{L}$ -зображення яких є скінченними. Ймовірнісний простір, на якому θ є коректно визначеною, є $((0; 1)^*, \mathfrak{B}^*, P)$, де $(0; 1)^* = (0; 1) \setminus \mathbb{Q}'$, $\mathfrak{B}^*$ – σ -алгебра борелівських підмножин $(0; 1)^*$.

Зауваження 0.2. Якщо всі рядки матриці перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ однакові і співпадають з вектором $(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots)$, то ми матимемо випадок незалежності та однакової розподіленості випадкових величин θ_n , який вивчався у роботі [3]. Якщо при цьому ще й $p_k = \frac{1}{k(k+1)}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, то розподіл θ буде рівномірним на $[0, 1]$.

1. КРИТЕРІЙ НАЯВНОСТІ АТОМІВ

Оскільки ми розглядаємо лише дійсні числа $x \in (0; 1]$, які мають нескінченне зображення, то для таких однозначно визначається число $a_k(x)$ – k -ий символ нескінченного $\tilde{L}$ -зображення числа. Тому очевидним є наступне твердження.

Лема 1.1. Для будь-якої послідовності натуральних чисел (c_n) мають місце наступні рівності

$$P\{\theta = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{\tilde{L}}\} = p_{c_1} \prod_{k=1}^{\infty} p_{c_k c_{k+1}},$$

$$P\{\theta \in \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{\tilde{L}}\} = p_{c_1} \prod_{k=1}^{n-1} p_{c_k c_{k+1}},$$

де $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{\tilde{L}} \equiv \{x : a_i(x) = c_i, i = \overline{1, n}\}$ – циліндр рангу n з основою $c_1 c_2 \dots c_n$.

Теорема 1.1. Розподіл випадкової величини θ має атоми тоді і тільки тоді, коли існує така послідовність натуральних чисел $(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots)$, що

$$H(a_n) \equiv p_{a_1} \prod_{k=1}^{\infty} p_{a_k a_{k+1}} > 0.$$

Точковим спектром (множиною атомів) розподілу випадкової величини θ є множина

$$D_\theta = \{x : H(a_n(x)) > 0\}.$$

Доведення. З єдиності $\tilde{L}$ -зображення числа $x \in (0; 1)^*$ випливає рівність:

$$P\{\theta = x\} = p_{a_1(x)} \prod_{k=1}^{\infty} p_{a_k(x) a_{k+1}(x)}, \quad (1)$$

а отже, x є атомом розподілу θ тоді і тільки тоді, коли існує принаймні одна послідовність (a_n) така, що

$$p_{a_1(x)} \prod_{k=1}^{\infty} p_{a_k(x) a_{k+1}(x)} > 0.$$

Отже, має місце теорема 1.1. □

Наслідок 1.1. Розподіл випадкової величини θ є неперервним, тобто ймовірнісна міра кожної одноточкової множини дорівнює нулю, тоді і тільки тоді, коли для довільної послідовності натуральних чисел (a_k) виконується рівність $H(a_n) = 0$.

Наслідок 1.2. Якщо існує набір натуральних чисел $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ такий, що

$$p_{i_1 i_2} = p_{i_2 i_3} = \dots = p_{i_k i_1} = 1,$$

то точка x з періодичним $\tilde{L}$ -зображенням $\Delta_{(i_1 i_2 \dots i_k)}^{\tilde{L}}$ є атомом розподілу θ з масою p_{i_1} . ■

Наслідок 1.3. Якщо елементи матриці перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ відокремлені від одиниці, то розподіл випадкової величини θ є неперервним.

Наслідок 1.4. Якщо має місце рівність

$$M \equiv \prod_{i=1}^{\infty} \max_k \{p_{ik}\} = 0,$$

то розподіл випадкової величини θ є неперервним.

Справді, оскільки $\sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} = 1$ для будь-якого $i \in \mathbb{N}$, то кожен рядок матриці $\|p_{ik}\|$ має найбільший елемент, а отже, для будь-якого $x \in (0, 1)^*$

$$P\{\theta = x\} = p_{a_1(x)} \prod_{k=1}^{\infty} p_{a_k(x)a_{k+1}(x)} \leq M = 0.$$

Отже, розподіл є неперервним за означенням.

Наслідок 1.5. Необхідною умовою наявності атомів у розподілу θ є нерівність

$$M > 0.$$

Зауваження 1.1. Умова $M > 0$ не є достатньою умовою наявності атомів, оскільки при виконанні системи рівностей

$$p_{jk_j} \equiv \max_k \{p_{jk}\} = p_{jj}, \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

розподіл випадкової величини θ атомів не має.

2. ВИРАЗ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ

Лема 2.1. Функція розподілу $F_{\theta}(x)$ випадкової величини θ для довільного $x \in (0; 1)^*$ має вигляд

$$F_{\theta}(x) = \beta_1(x) + p_{a_1(x)} \sum_{k=2}^{\infty} (\beta_k(x) \prod_{i=1}^{k-2} p_{a_i(x)a_{i+1}(x)}), \quad \text{де} \quad (2)$$

$$\beta_1(x) = \sum_{j=a_1(x)+1}^{\infty} p_j, \quad \beta_k(x) = \begin{cases} \sum_{j=a_k(x)+1}^{\infty} p_{a_{k-1}(x)j}, & \text{якщо } k = 2m - 1, \\ \sum_{j=1}^{a_k(x)-1} p_{a_{k-1}(x)j}, & \text{якщо } k = 2m, m \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

і $a_k(x)$ є k -им $\tilde{L}$ -символом числа x , для решти точок $x \in \mathbb{R}$ функція розподілу до визначається за неперервністю зліва.

Доведення. Нагадаємо, що $F_{\theta}(x) = P\{\theta < x\}$. Тоді оскільки подія $\{\theta < x\}$, де $x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_k \dots}^{\tilde{L}}$, є об'єднанням несумісних подій, а саме:

$$\begin{aligned} \{\theta < x\} &= \{\theta_1 > a_1(x)\} \cup \{\theta_1 = a_1(x) \wedge \theta_2 < a_2(x)\} \cup \dots \cup \\ &\cup \{\theta_1 = a_1(x) \wedge \theta_2 = a_2(x) \wedge \dots \wedge \theta_{2k-2} = a_{2k-2}(x) \wedge \theta_{2k-1} > a_{2k-1}(x)\} \cup \\ &\cup \{\theta_1 = a_1(x) \wedge \theta_2 = a_2(x) \wedge \dots \wedge \theta_{2k-1} = a_{2k-1}(x) \wedge \theta_{2k} < a_{2k}(x)\} \cup \dots \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} &P\{\theta_1 = a_1(x), \dots, \theta_{k-1} = a_{k-1}(x), \theta_k > a_k(x)\} = \\ &= P\{\theta_1 = a_1(x)\} \dots P\{\theta_{k-1} = a_{k-1}(x) | \theta_{k-2} = a_{k-2}(x)\} P\{\theta_k > a_k(x) | \theta_{k-1} = a_{k-1}(x)\} = \\ &= p_{a_1(x)} \prod_{i=1}^{k-2} p_{a_i(x)a_{i+1}(x)} \cdot \sum_{j=a_k(x)+1}^{\infty} p_{a_{k-1}(x)j}, \end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned}
& P\{\theta_1 = a_1(x), \dots, \theta_{k-1} = a_{k-1}(x), \theta_k < a_k(x)\} = \\
& = P\{\theta_1 = a_1(x)\} \dots P\{\theta_{k-1} = a_{k-1}(x) | \theta_{k-2} = a_{k-2}(x)\} P\{\theta_k < a_k(x) | \theta_{k-1} = a_{k-1}(x)\} = \\
& = p_{a_1(x)} \prod_{i=1}^{k-2} p_{a_i(x)a_{i+1}(x)} \cdot \sum_{j=1}^{a_k(x)-1} p_{a_{k-1}(x)j},
\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
F_\theta(x) &= \sum_{j=a_1(x)+1}^{\infty} p_j + p_{a_1(x)} \cdot \sum_{j=1}^{a_2(x)-1} p_{a_1(x)j} + \dots + \\
&+ p_{a_1(x)} \prod_{i=1}^{2k-3} p_{a_i(x)a_{i+1}(x)} \sum_{j=a_{2k-1}(x)+1}^{\infty} p_{a_{2k-2}(x)j} + \\
&+ p_{a_1(x)} \prod_{i=1}^{2k-2} p_{a_i(x)a_{i+1}(x)} \sum_{j=1}^{a_{2k}(x)-1} p_{a_{2k-1}(x)j} + \dots
\end{aligned}$$

Використовуючи введені скорочення $\beta_k(x)$, отримуємо вираз (2). $\square$

Наслідок 2.1. Якщо всі елементи матриці перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ додатні, то функція розподілу F_θ випадкової величини θ є строго зростаючою на $[0, 1]$ і її спектр фрактальними властивостями не володіє. Якщо ж $p_{\tau\varsigma=0}$, то $F_\theta(x)$ є постійною на кожному з інтервалів

$$\nabla_{a_1 a_2 \dots a_k \tau \varsigma} \equiv (\Delta_{a_1 a_2 \dots a_k \tau \varsigma}(1); \Delta_{a_1 a_2 \dots a_k \tau(\varsigma+1)(1)}).$$

Лема 2.2. Якщо в точці x_0 існує похідна $F'_\theta(x_0)$ функції розподілу $F_\theta(x_0)$, то вона обчислюється за формулою:

$$F'_\theta(x_0) = p_{a_j(x_0)} \prod_{k=1}^{\infty} [a_k(x_0)(a_k(x_0) \cdot p_{a_k(x_0)a_{k+1}(x_0)} + 1)]. \quad (3)$$

Доведення. Справді, якщо похідна $F'_\theta(x_0)$ існує, то

$$F'_\theta(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P\{\theta \in \Delta_{a_1(x_0) \dots a_k(x_0)}^{\tilde{L}}\}}{|\Delta_{a_1(x_0) \dots a_k(x_0)}^{\tilde{L}}|},$$

але

$$P\{\theta \in \Delta_{a_1(x_0) \dots a_k(x_0)}^{\tilde{L}}\} = p_{a_1(x_0)} \prod_{j=1}^k p_{a_j(x_0)a_{j+1}(x_0)},$$

а

$$|\Delta_{a_1(x_0) \dots a_k(x_0)}^{\tilde{L}}| = \prod_{j=1}^k \frac{1}{a_j(x_0)(a_j(x_0) + 1)}.$$

Звідки і випливає формула (3). $\square$

3. ЛЕБЕГІВСЬКА СТРУКТУРА РОЗПОДІЛУ

Нагадаємо [5], що згідно з класичною теоремою Лебега про розклад функції обмеженої варіації довільна функція розподілу F може бути представлена у вигляді

$$F(x) = \alpha_1 F_d(x) + (1 - \alpha_1) F_c(x) \quad (4)$$

$$= \alpha_1 F_d(x) + \alpha_2 F_{ac}(x) + \alpha_3 F_s(x), \quad (5)$$

$\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, $0 \leq \alpha_1 \leq 1$, $F_d(x)$ — дискретна (функція стрибків), $F_c(x)$ — неперервна, $F_{ac}(x)$ — абсолютно неперервна, $F_s(x)$ — сингулярна функції розподілу — компоненти функції розподілу.

Кожна з рівностей (4) і (5) називається *лебегівською структурою функції розподілу* F ; рівність (4) висвітлює вміст дискретної та неперервної компонент, а рівність (5) — вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної компонент.

При цьому, коли один з коефіцієнтів α_i дорівнює 1 (а отже, інші дорівнюють 0), то розподіл називається чистим в залежності від того, де 1 — відповідно чисто дискретний, чисто неперервний, чисто абсолютно неперервний, чисто сингулярний. У випадку, коли жоден з коефіцієнтів не дорівнює 1, розподіл називається сумішшю тих розподілів, при яких коефіцієнти відмінні від 0. Зокрема, якщо $0 < \alpha_1 < 1$, то розподіл називається сумішшю дискретного і неперервного.

Теорема 3.1. *Якщо всі елементи матриці $\|p_{ik}\|$ є одиницями або нулями, то розподіл випадкової величини θ є чисто дискретним з єдиним атомом у кожному циліндрі першого рангу, маса якого дорівнює відповідній початковій ймовірності, зокрема:*

- 1) якщо $p_{jj} = 1$ для всіх $j \in \mathbb{N}$, то точковий спектр є множиною точок виду $\Delta_{(j)}^{\tilde{L}}$;
- 2) якщо $p_{jk} = 1$ для всіх $j \in \mathbb{N}$ та деякого фіксованого $k \in \mathbb{N}$, то точковий спектр є множиною точок виду $\Delta_{j(k)}^{\tilde{L}}$;
- 3) якщо $p_{j(j+k)} = 1$ для всіх $j \in \mathbb{N}$ та деякого фіксованого $k \in \mathbb{N}$, то точковий спектр є множиною точок виду $\Delta_{j[j+k][j+k][j+2k][j+2k][j+3k] \dots}^{\tilde{L}}$.

Доведення. Для доведення твердження досить показати, що для будь-якого натурального числа j виконується рівність

$$P\{\theta \in \Delta_j\} = \sum_{x \in D_\theta \cap \Delta_j} P\{\theta = x\}. \quad (6)$$

Нехай j — довільне натуральне число. За лемою 1.1

$$P\{\theta \in \Delta_j^{\tilde{L}}\} = p_j.$$

Можливі два випадки: $p_{jj} = 1$ або $p_{jj} \neq 1$.

Якщо $p_{jj} = 1$, то за теоремою 1.1 точка $\Delta_{(j)}^{\tilde{L}}$ є єдиним атомом розподілу випадкової величини θ у циліндрі $\Delta_j^{\tilde{L}}$ і він має масу p_j , а отже, рівність (6) виконується.

Якщо $p_{jj} \neq 1$, то існує таке натуральне $j_1 \neq j$, що $p_{jj_1} = 1$. Можливі два випадки: $p_{j_1 j_1} = 1$ або $p_{j_1 j_1} \neq 1$.

Якщо $p_{j_1 j_1} = 1$, то точка з періодичним зображенням виду $\Delta_{j(j_1)}^{\tilde{L}}$ є атомом з масою p_j . Тоді циліндр $\Delta_j^{\tilde{L}}$ містить єдиний атом, маса якого p_j . Отже, рівність (6) виконується.

Якщо $p_{j_1 j_1} \neq 1$, то існує таке натуральне $j_2 \neq j_1$, що $p_{j_1 j_2} = 1$. І знову можливі два випадки: $p_{j_2 j_2} = 1$ або $p_{j_2 j_2} \neq 1$.

Аналогічно, якщо знайдеться таке j_k , що дорівнює j_m , $m < k$ таке, що $p_{j_k j_m} = 1$, то точка з періодичним зображенням є атомом, маса якого дорівнює p_j .

Якщо ж такого k і j_k не знайдеться, то існує послідовність (j_n) така, що $p_{j_n j_{n+1}} = 1$ для всіх n (причому $j_n \neq j_m$ при $m < n$). Тоді точка $\Delta_{j_1 j_2 \dots j_n \dots}^{\tilde{L}}$ є атомом розподілу θ , який належить $\Delta_f^{\tilde{L}}$. Його маса

$$P\{\theta = \Delta_{j_1 j_2 \dots j_n \dots}^{\tilde{L}}\} = p_j \prod_{n=1}^{\infty} p_{j_n j_{n+1}} = p_j.$$

А отже, рівність (6) виконується.

Розглянемо частинні випадки.

1) З доведеного вище при $p_{jj} = 1$ для деякого j атомом розподілу є точка $\Delta_{(j)}^{\tilde{L}}$ з масою p_j . Оскільки $\sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1$, то сумарна маса таких атомів дорівнює одиниці.

Тобто, точковий спектр складається лише з точок виду $\Delta_{(j)}^{\tilde{L}}$.

2) Якщо $p_{jk} = 1$ для всіх $j \in \mathbb{N}$ та деякого фіксованого $k \in \mathbb{N}$, то $p_{kk} = 1$ і атомами розподілу є точки виду $\Delta_{j(k)}^{\tilde{L}}$ відповідно з масами p_j . Оскільки сума всіх p_j при $j \in \mathbb{N}$ дорівнює одиниці, то точковий спектр складається лише з точок такого виду.

3) Якщо $p_{j(j+k)} = 1$ для всіх $j \in \mathbb{N}$ та деякого фіксованого $k \in \mathbb{N}$, то для будь-якого $m \in \mathbb{N}$ з леми 1.1 впливає наступна рівність

$$P\{\theta = \Delta_{m[m+k][m+k][m+2k][m+2k][m+3k]\dots}^{\tilde{L}}\} = p_m \prod_{i=m}^{\infty} p_{i(i+k)} = p_m.$$

Тому з рівності суми всіх початкових ймовірностей одиниці впливає, що точковий спектр є множиною точок виду $\Delta_{j[j+k][j+k][j+2k][j+2k][j+3k]\dots}^{\tilde{L}}$. $\square$

Зауваження 3.1. Розподіл θ може мати атоми, навіть коли в матриці перехідних ймовірностей нулів взагалі немає. Наприклад, якщо $p_{ik} > 0$, для всіх $i \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, але

$$p_{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{(i+1)^2},$$

то в цьому випадку точковий спектр розподілу буде співпадати з хвостовою множиною $\tilde{L}$ -зображення, представником якої є точка $x_0 = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{\tilde{L}}$, де $a_n = n$, $n = 1, 2, \dots$. Справді,

$$P\{\theta = x_0\} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(i+1)^2}\right) = \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) > 0,$$

оскільки ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається.

Лема 3.1. *Якщо існує таке $m \in \mathbb{N}$, що $p_{jj} = 1$, $p_{[m+i]j} = 0$ для всіх $j \leq m$ і $\prod_{i=1}^{\infty} \max_k \{p_{[m+i][m+k]}\} = 0$ для всі $k \in \mathbb{N}$, то функція розподілу випадкової величини θ має наступну лебегівську структуру*

$$F_{\theta}(x) = pF_d(x) + qF_c(x), \quad (7)$$

$$\text{де } p = \sum_{j=1}^m p_j, \quad q = 1 - p, \quad F_d(x) = \frac{1}{p} \sum_{x_j < x} p_j, \quad F_c(x) = \frac{1}{q} (F_{\theta}(x) - pF_d(x)).$$

Доведення. За теоремою Лебега функцію розподілу випадкової величини θ можна подати у вигляді рівності (7), де $F_d(x)$ — дискретна функція розподілу, $F_c(x)$ — неперервна функція розподілу, p — сумарна маса атомів, $q = 1 - p$.

При виконанні умов леми очевидно, що $p_{j(k+1)} = 0$ при всіх $k \in \mathbb{N}$ і розподіл θ матиме m атомів, а саме: точки виду $x_j = \Delta_{(j)}^{\tilde{L}}$ з масами p_j відповідно. Тому

$$p = \sum_{j=1}^m p_j, \quad q = \left(1 - \sum_{j=1}^m p_j\right).$$

Тоді

$$F_d(x) = \frac{1}{p} \sum_{x_j < x} p_j.$$

Разом з цим лема 2.1 дає вираз функції розподілу $F_\theta(x)$, а тому з рівності (7) маємо

$$F_c(x) = \frac{1}{q} (F_\theta(x) - pF_d(x)). \quad \square$$

4. СПЕКТРАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗПОДІЛУ

Нехай $D[\tilde{L}, \bar{i}\bar{j}]$ – множина дійсних чисел, в $\tilde{L}$ -зображенні яких забороняється комбінація наперед заданих символів i та j , тобто

$$D[\tilde{L}, \bar{i}\bar{j}] = \{x : x = \Delta_{a_1 \dots a_n \dots}^{\tilde{L}}, \quad a_k a_{k+1} \neq ij, \quad \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

Лема 4.1. *Множина*

$$D[\tilde{L}, \bar{i}\bar{j}] = \{x : x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{\tilde{L}}, \quad \text{де } a_k a_{k+1} \neq ij \quad \forall k \in \mathbb{N}\}$$

є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.

Доведення. Доведемо спочатку ніде не щільність множини $D[\tilde{L}, \bar{i}\bar{j}]$. Нехай (a, b) довільний інтервал відрізка $[0, 1]$. Легко вказати циліндр $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{\tilde{L}} \subset (a, b)$. Тоді внутрішність циліндра $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m ij}^{\tilde{L}}$ не містить жодної точки множини $D[\tilde{L}, \bar{i}\bar{j}]$. Отже, за означенням множина $D[\tilde{L}, \bar{i}\bar{j}]$ є ніде не щільною.

Доведемо, що $\lambda(D[\tilde{L}, \bar{i}\bar{j}]) = 0$, де λ – міра Лебега. Нехай F_{2k} – об'єднання всіх циліндрів рангу $2k$, внутрішність яких містить точки множини $D[\tilde{L}, \bar{i}\bar{j}]$, $F_0 = (0, 1]$, а множину $\overline{F}_{2(k+1)}$ означимо рівністю

$$\overline{F}_{2(k+1)} = F_{2k} \setminus F_{2(k+1)}.$$

Тоді $\lambda(\overline{F}_{2(k+1)}) = \lambda(F_{2k}) - \lambda(F_{2(k+1)})$.

$$\frac{\lambda(\overline{F}_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})} = 1 - \frac{\lambda(F_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})}. \quad (8)$$

Очевидно, що $F_{2k} \supset F_{2(k+1)} \supset D[\tilde{L}, \bar{i}\bar{j}] \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

$$D[\tilde{L}, \bar{i}\bar{j}] = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} F_{2k}.$$

З неперервності міри Лебега зверху маємо

$$\lambda(D[\tilde{L}, \bar{i}\bar{j}]) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(F_{2k}).$$

Тоді

$$\lambda(D[\tilde{L}, \bar{i}\bar{j}]) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda(F_{2k})}{\lambda(F_{2(k-1)})} \cdot \frac{\lambda(F_{2(k-1)})}{\lambda(F_{2(k-2)})} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda(F_2)}{\lambda(F_0)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{2k})}{\lambda(F_{2(k-1)})}.$$

З рівності (8) маємо

$$\lambda(D[\tilde{L}, \bar{i}\bar{j}]) = \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{\lambda(\overline{F}_{2k})}{\lambda(F_{2(k-1)})}\right].$$

Останній нескінченний добуток розбігається до нуля тоді і тільки тоді, коли розбігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\overline{F}_{2k})}{\lambda(F_{2(k-1)})}. \quad (9)$$

Знайдемо оцінки відношення $\frac{\lambda(\overline{F}_{2k})}{\lambda(F_{2(k-1)})}$. Нехай $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2k}}^{\tilde{L}}$ – циліндр із F_{2k} . Можливі випадки 1) $c_{2k} = i$, 2) $c_{2k} \neq i$.

$$\text{Якщо } c_{2k} = i, \text{ то } \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2k} j}^{\tilde{L}} \cap D[\tilde{L}, \overline{ij}] = \emptyset \text{ і } \frac{\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2k} j}^{\tilde{L}}}{\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2k}}^{\tilde{L}}} = \frac{1}{j(j+1)}.$$

$$\text{Якщо } c_{2k} \neq i, \text{ то } \text{int} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2k} ij}^{\tilde{L}} \cap D[\tilde{L}, \overline{ij}] = \emptyset \text{ і } \frac{\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2k} ij}^{\tilde{L}}}{\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2k}}^{\tilde{L}}} = \frac{1}{i(i+1)j(j+1)}.$$

Тому

$$0 < \frac{1}{i(i+1)j(j+1)} \leq \frac{\lambda(\overline{F}_{2k})}{\lambda(F_{2(k-1)})} \leq \frac{1}{j(j+1)} < 1.$$

Отже, ряд (9) розбігається і $\lambda(D[\tilde{L}, \overline{ij}]) = 0$. $\square$

Нагадаємо, що *спектром* S_θ розподілу випадкової величини θ називається множина всіх точок росту її функції розподілу F_θ , тобто мінімальна замкнена множина, на якій зосереджений розподіл випадкової величини θ .

Лема 4.2. *Спектром розподілу випадкової величини θ є замикання множини*

$$E = \{x : x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_k}^{\tilde{L}}, \quad p_i > 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad p_{a_k a_{k+1}} > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

Доведення. 1. Покажемо, що $E \subset S_\theta$. Нехай $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_k}^{\tilde{L}} = x \in E$. Тоді

$$P\{\theta \in \Delta_{a_1 a_2 \dots a_k}^{\tilde{L}}\} = p_{a_1} \prod_{i=1}^{k-1} p_{a_i a_{i+1}} > 0$$

для довільного $k \in \mathbb{N}$. З властивостей циліндрів випливає, що для довільного додатного ε існує таке k , що

$$\Delta_{a_1 a_2 \dots a_k}^{\tilde{L}} \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon).$$

Тому

$$P\{\theta \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)\} \geq P\{\theta \in \Delta_{a_1 a_2 \dots a_k}^{\tilde{L}}\} > 0,$$

тобто $x \in S_\theta$ і, отже, $E \subset S_\theta$.

2. Покажемо, що $S_\theta \subset \overline{E}$. Нехай $x \in S_\theta$, тобто

$$P\{\theta \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)\} > 0 \text{ для будь-якого } \varepsilon > 0. \quad (10)$$

Припустимо, що існує k таке, що $p_{a_{k-1} a_k} = 0$, де $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_k}^{\tilde{L}} = x$. Тоді

$$P\{\theta \in \Delta_{a_1 a_2 \dots a_k}^{\tilde{L}}\} = p_{a_1} \prod_{i=1}^{k-1} p_{a_i a_{i+1}} = 0.$$

Можливі два випадки:

- (1) існує $\varepsilon > 0$ таке, що $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \Delta_{a_1 a_2 \dots a_k}^{\tilde{L}}$;
- (2) $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \not\subset \Delta_{a_1 a_2 \dots a_k}^{\tilde{L}}$ для довільного $\varepsilon > 0$.

У першому випадку

$$P\{\theta \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)\} \leq P\{\theta \in \Delta_{a_1 a_2 \dots a_k}^{\tilde{L}}\} = 0,$$

що суперечить (10).

У другому випадку x є односторонньою граничною точкою множини S_θ . Для конкретності нехай лівосторонньою. Тоді існує таке $\varepsilon > 0$, що $(x - \varepsilon, x) \subset \Delta_{a_1 a_2 \dots a_k}^{\tilde{L}}$ і $P\{\theta \in (x, x + \varepsilon)\} = 0$. І в цьому випадку

$$P\{\theta \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)\} = P\{\theta \in (x - \varepsilon, x)\} \leq P\{\theta \in \Delta_{a_1 a_2 \dots a_k}^{\tilde{L}}\} = 0,$$

що суперечить умові (10).

Отримана суперечність доводить, що $p_{a_{k-1}a_k} > 0$ для довільного $k \in \mathbb{N}$, тобто $x \in E$. Отже, $S_\theta = E$, що й вимагалось довести. $\square$

Теорема 4.1. *Якщо матриця перехідних ймовірностей має принаймні один нуль, то спектр розподілу випадкової величини θ має нульову міру Лебега.*

Доведення. Якщо $p_{ij} = 0$, то згідно з лемою 4.2 $S_\theta \subset D[L, \bar{i}\bar{j}]$. А тому згідно з лемою 4.1 $\lambda(S_\theta) = \lambda(D[L, \bar{i}\bar{j}]) = 0$. $\square$

Наслідок 4.1. *Якщо елементи матриці перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ відокремлені від одиниці і вона містить принаймні один нуль, то розподіл випадкової величини θ є сингулярним розподілом канторівського типу.*

Наслідок 4.2. *Якщо матриця перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ містить принаймні один нуль і для будь-якої послідовності $(a_n), a_n \in \mathbb{N}$, вираз (1) рівний нулю, то розподіл θ є сингулярним розподілом канторівського типу.*

5. ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ СПЕКТРА

Теорема 5.1. *Якщо $p_{ii} > 0$, $p_{i(i+1)} > 0$, причому $p_{ii} + p_{i(i+1)} = 1 \forall i \in \mathbb{N}$, то спектр розподілу випадкової величини θ є аномально фрактальною множиною, тобто його розмірність Хаусдорфа-Безиковича [6] дорівнює нулю.*

Доведення. Очевидно, що

$$S_\theta \subset E = \{x : x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{\tilde{L}}, \text{ де } a_{n+1} - a_n \in \{0; 1\} \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Покажемо, що $\alpha_0(E) = 0$. Для цього досить довести, що для будь-якого $\alpha > 0$ має місце нерівність

$$\alpha_0(E) < \alpha.$$

Оскільки спектр розподілу

$$S_\theta = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta'_i,$$

де $\Delta'_i = \Delta_i^{\tilde{L}} \cap S_\theta, i = 1, 2, \dots$, та $S_\theta \stackrel{\frac{1}{2}}{\sim} \Delta'_i$, то досить довести, що

$$\alpha_0(\Delta'_1) = 0.$$

Легко бачити, що розмірність множини Δ'_1 не перевищує розмірності самоподібної множини

$$C = C[\tilde{L}, V], \text{ де } V = \{1, 2\},$$

яка є розв'язком рівняння

$$\frac{1}{2^x} + \frac{1}{6^x} = 1,$$

а отже, числа 0,61.

Враховуючи, що

$$\Delta'_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta'_{1 \dots 1 \dots 1} \cup \{\Delta_{(1)}\}, \text{ де } \Delta'_{12} \stackrel{k}{\sim} \Delta'_{1 \dots 1 \dots 1}, \quad k = \frac{1}{2^{n-1}},$$

і $\alpha_0(\Delta'_{12}) \leq \alpha_0(C[\tilde{L}, V])$, де $V = \{2, 3\}$, отримуємо, що $\alpha_0(\Delta'_{12})$ не перевищує розв'язку рівняння

$$\frac{1}{6^x} + \frac{1}{12^x} = 1,$$

а отже, числа 0,34.

Аналогічно,

$$\Delta'_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \Delta'_{\underbrace{11\dots 1}_n \underbrace{22\dots 2}_m 3} \cup \{\Delta_{1(2)}\} \cup \{\Delta_{11(2)}\},$$

де $\Delta'_{123} \stackrel{k}{\sim} \Delta'_{\underbrace{11\dots 1}_n \underbrace{22\dots 2}_m 3}, \quad k = \frac{1}{2^{n+m-2}},$

і $\alpha_0(\Delta'_{123}) \leq \alpha_0(C[\tilde{L}, V])$, де $V = \{3, 4\}$, отримуємо, що $\alpha_0(\Delta'_{123})$ не перевищує розв'язку рівняння

$$\frac{1}{12^x} + \frac{1}{20^x} = 1,$$

тобто числа 0,26.

Міркуючи аналогічно, отримаємо, що розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини Δ'_1 не перевищує розв'язку рівняння

$$\left(\frac{1}{m(m+1)} \right)^x + \left(\frac{1}{(m+1)(m+2)} \right)^x = 1$$

при будь-якому $m \in \mathbb{N}$, тобто $\alpha_0(E) = \alpha_0(S_\theta) = 0$. □

ЛІТЕРАТУРА

- [1] S. Kalpazidou, A. Knopfmacher, J. Knopfmacher, *Lüroth-type alternating series representations for real numbers*, Acta Arith **55** (1990), 311–322.
- [2] J. Lüroth, *Über eine eindeutige Entwicklung von Zahlen in eine unendliche Reihe*, Math. Ann. **21** (1883), 411–423.
- [3] M. Pratsiovytyi, Yu. Khvorostina, *Topological and metric properties of distributions of random variables represented by the alternating Lüroth series with independent elements*, Random Oper. Stoch. Equ. **21** (2013), №4, 385–401.
- [4] Ю.І. Жихарева, М.В. Працьовитий, *Властивості розподілу випадкової величини, елементи зображення якої знаходяться в ряді Люрота утворюють однорідний ланцюг Маркова*, Наук. часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. (2009), №10, 100–107.
- [5] Е. Лукач, *Характеристические функции*, “Наука” Москва, 1979.
- [6] М. В. Працьовитий *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів*, “НПУ імені М. П. Драгоманова” Київ, 1998.
- [7] М.В. Працьовитий, Ю.В. Хворостіна, *Основи метричної теорії зображення дійсних чисел знакозмінними рядами Люрота та найпростіші застосування* Наук. часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. (2010), №11, 102–118.

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ІНСТИТУТ, НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. М.П. ДРАГОМАНОВА, вул. ПИРОГОВА, 9, КИЇВ, 01601, УКРАЇНА
E-mail address: prats4@yandex.ru

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ #1, СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. А.С. МАКАРЕНКА, вул. РОМЕНСЬКА, 87, СУМИ, 40002, УКРАЇНА
E-mail address: khvorostina13@mail.ru