УДК 538.3+372.853

Величко С. П. – *доктор педагогичных наук, профессор – Кировоградский государственный педагогический университет имени В. Винниченко, г. Кировоград, Украина*

Герасимова Т. Ю – *магистрант,*

Иваний В.С. – *канд. техн. наук, профессор*

Мороз И.А. – *доктор педагогических наук, профессор*

Сумский государственный педагогический университет имени А.С. Макаренко, г. Сумы, Украина

Методика построения релятивистской механики на основе принципа наименьшего действия в системе подготовки учителя физики

Аннотация: *Рассмотрено применение принципа наименьшего действия для построения методики изложения динамики СТО в учебном процессе подготовки учителя физики. Произведен анализ релятивистских выражений для основных динамических характеристик частиц.*

Ключевые слова: *уравнения Лагранжа, принципы наименьшего действия, относительности и соответствия.*

Как известно, классическую механику рассматривают двумя методами. В основе одного из них лежат законы Ньютона, которые являются обобщением опытных данных о движении макроскопических тел с относительно небольшими скоростями. В основе другого метода лежит принцип наименьшего действия. Благодаря относительной простоте и наглядности при первичном изучении физики предпочтение отдается построению механики на основе законов Ньютона. Однако в теоретической физике предпочтение отдается второму методу, поскольку он позволяет сделать обобщения и на более сложные виды движения материи, например, электромагнитное поле и т.п.

Релятивистскую механику также можно рассматривать двумя способами: как обобщение механики Ньютона на случай больших скоростей, так и построение релятивистской механики на основе принципа наименьшего действия.

В большинстве учебно-методических пособий построение релятивистской механики на основе принципа наименьшего действия не рассматривается вовсе и это никак не объясняется, см., например, [1-6]. Следует отметить, что специальная теория относительности (СТО) должна преподаваться как фундамент всей теоретической физики с использованием современного ковариантного математического языка, но до сих пор будущим учителям - студентам педагогических вузов СТО излагается в большей степени с прикладной целью, как теория, которая лишь уточняет законы механики на случай движения тел с большими скоростями. Как результат до сих пор возникают дискуссии и споры в научно-технических кругах (как правило, далеких от теоретической физики) по поводу парадоксов СТО, проблемы релятивистской массы и т.д.

Поэтому в данной статье предлагается рассмотреть релятивистскую механику именно на основе принципа наименьшего действия, который при соответствующем обобщении можно применить не только к механических систем.

Согласно этому принципу, действительный переход системы из одного состояния в другое отличается от других возможных переходов за тот же промежуток времени тем, что для него интеграл действия принимает минимальное значение:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \min \quad \text{или} \quad \delta S = 0 \tag{1}$$

Анализ данного выражения на минимум позволяет получить систему уравнений Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0 \qquad (2)$$

где α=1, 2, 3, … - число степеней свободы, $L=K-U$ - функция Лагранжа, q – обобщенная координата. Можно легко показать, что уравнения Лагранжа при применении к материальной точке превращаются в математические выражения второго закона Ньютона, а при анализе системы материальных точек - позволяют сформулировать общие теоремы динамики и законы сохранения импульса, момента импульса и энергии. Следовательно, функция Лагранжа несет в себе всю информацию о механическом состоянии материальной системы. В классической механике функция Лагранжа свободной частицы представляет в общем случае кинетическую энергию:

$$L_{кл}=const+\frac{1}{2}m\upsilon^2 \qquad (3)$$

При этом константу обычно опускают, поскольку всегда используется производная от функции Лагранжа. Таким образом, при построении релятивистской механики стоит задача установить релятивистский вид функции Лагранжа.

В основу положим два принципа:

1. Принцип относительности, то есть требование, чтобы все величины, которыми мы будем оперировать, были инвариантными.

2. Принцип соответствия, согласно которому любая общая теория должна содержать как предельный случай менее общую теорию.

Для свободной частицы единственной инвариантной величиной, характеризующей все события, связанные с частицей, является пространственно-временной интервал. Поэтому действие S в (1) должно выражаться через пространственно-временной интервал ds (других инвариантных величин, характеризующих свободную частицу просто нет), причем линейно, поскольку пространство и время являются однородными:

$$S = \int_a^b L dt = A\int_a^b ds \tag{4}$$

где A - некоторая, пока неизвестна, константа, a и b - мировые точки начала и конца траектории движения. С учетом явного вида интервала в собственной системе отсчета частицы ($ds = c\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}dt$) выражение для действия можно записать в виде:

$$S = Ac\int_a^b \sqrt{1-\upsilon^2/c^2}dt \tag{5}$$

Поэтому релятивистская функция Лагранжа будет иметь вид:

$$L = Ac\sqrt{1-\upsilon^2/c^2} \tag{6}$$

Для определения константы A воспользуемся принципом соответствия. В предельном случае малых скоростей ($\upsilon/c \to 0$) величину $\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$ можно разложить в ряд Тейлора, в котором сохраним только первые два слагаемые:

$$\sqrt{1-\upsilon^2/c^2} = (1-\upsilon^2/c^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} + \ldots$$

В силу принципа соответствия (при $\upsilon/c \to 0$) релятивистская функция Лагранжа должна преобразоваться в классическую: $L \to L_{кл}$. В результате имеем:

$$Ac\left(1 - \frac{\upsilon^2}{2c^2}\right) = \frac{m\upsilon^2}{2} + const, \quad \Rightarrow \quad Ac - \frac{A\upsilon^2}{2c} = \frac{m\upsilon^2}{2} + const$$

Приравнивая слагаемые с одинаковыми степенями υ находим:

$$A = -mc. \tag{7}$$

Поэтому релятивистская функция Лагранжа свободной частицы в окончательном виде будет выглядеть так:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}\ ,\qquad (8)$$

где m – масса покоя (в старой литературе масса покоя обозначается - m_0).

Для случая точечных тел (частиц) в качестве обобщенных координат удобно выбирать обычные декартовы координаты. В рамках формализма Лагранжа, обобщенный импульс определяется как частная производная от функции Лагранжа по обобщенной скорости:

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\qquad (9)$$

В случае точечных тел обобщенные координаты и обобщенные скорости имеют вид: $q_1 = x,\quad q_2 = y,\quad q_3 = z; \Rightarrow \dot{q} = \upsilon_x,\quad \dot{q} = \upsilon_y,\quad \dot{q} = \upsilon_z.$

Тогда для x компоненты импульса имеем:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \upsilon_x} = -mc^2\frac{\partial}{\partial \upsilon_x}\left(\sqrt{1-\frac{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2}{c^2}}\right) = -m_0c^2\frac{-2\upsilon_x/c^2}{2\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \frac{m\upsilon_x}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}};$$

Аналогично находим другие обобщенные импульсы:

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \upsilon_y} = \frac{m\upsilon_y}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}},\qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \upsilon_z} = \frac{m\upsilon_z}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}.$$

Таким образом, как и в классической механике, обобщенными импульсами частицы является проекции обычного импульса на оси координат.

Определив проекции импульса, можно записать выражение для релятивистского импульса в векторной форме:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}.\qquad (10)$$

Отсюда сразу следует релятивистское обобщение второго закона Ньютона:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}.\qquad (11)$$

Прямой подстановкой можно убедиться, что в таком виде закон движения частицы является инвариантным относительно преобразования Лоренца и, в предельном случае малых скоростей, включает в себя классический второй закон Ньютона.

Получим теперь выражение для релятивистской энергии. Как известно, механическая энергия (функция Гамильтона) связана с функцией Лагранжа следующим соотношением:

$$H = \varepsilon = \sum_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - L = \sum_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} p_{\alpha} - L, \tag{12}$$

в котором от скоростей частиц нужно перейти к их импульсам. Тогда имеем:

$$H = \varepsilon = \sum_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - L = \upsilon_x p_x + \upsilon_y \frac{\partial L}{\partial \upsilon_y} + \upsilon_z \frac{\partial L}{\partial \upsilon_z} - L =$$
$$= \frac{m\upsilon_x^2 + m\upsilon_y^2 + m\upsilon_z^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} + mc^2\sqrt{1-\upsilon^2/c^2},$$

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}, \tag{13}$$

Выражение (13) еще не является функцией Гамильтона, поскольку в нем нужно перейти от скорости к импульсу. Для этого выразим скорость частицы через ее импульс.

$$\frac{p}{m\upsilon} = \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \to \frac{m^2\upsilon^2}{p^2} = 1 - \frac{\upsilon^2}{c^2} \to \upsilon = \frac{cp}{\sqrt{m^2c^2 + p^2}}, \tag{14}$$

Поделим энергию на импульс:

$$\frac{\varepsilon}{p} = \frac{c^2}{\upsilon} \to \varepsilon = \frac{c^2 p}{\upsilon}, \tag{15}$$

тогда, подставляя в последнее выражение скорость (14), получим искомую функцию Гамильтона:

$$H = \varepsilon = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}. \tag{16}$$

Если в выражения для импульса и энергии ввести обозначение

$$m_{рел} = \frac{m}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}, \qquad (17)$$

то выражения (10, 13) приобретают простой вид

$$\varepsilon = m_{рел}c^2, \quad \vec{p} = m_{рел}\vec{\upsilon}. \qquad (18)$$

Величину $m_{рел}$ называют *релятивистской массой*. При этом определение релятивистского импульса (18) формально совпадет с определением импульса в классической механике. Но теперь, как видно из формулы (17), в отличие от классической физики, релятивистская масса тел в СТО не постоянна, она зависит от скорости (см. рис. 1).

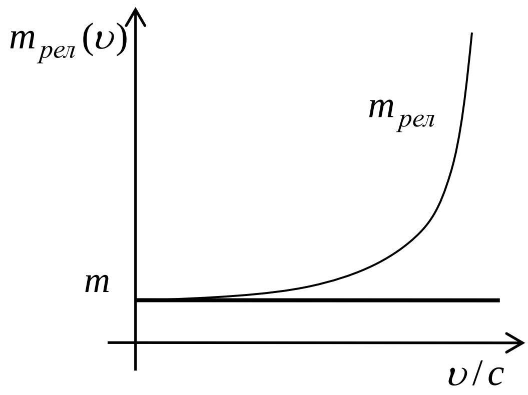

Рис.1. Зависимость релятивистской массы от скорости движения частицы.

Из этого рисунка видно, что релятивистская масса $m_{рел}$ при малых скоростях $\upsilon << c$ близка к обычной массе m и в пределе, когда тело находится в состоянии покоя в точности с ней совпадает.

Следует отметить, что трактовка формулы (17), как зависимость массы от скорости, вызывает определенное возражение многих физиков, см., например, [6]. Возражения против понятия «релятивистская масса», определенной как (17), связано с тем, что оно противоречит следствиям принципа относительности. Из принципа относительности следует, что существует такая форма записи законов физики, которая не зависит от выбора системы отсчета. Такая форма записи найдена и называется ковариантная 4-мерная форма. Уравнения, записанные в такой форме, автоматически инвариантны по отношению к изменению системы отсчета, т.е. по отношению к преобразованиям Лоренца.

В ковариантной форме уравнений могут использоваться только тензорные величины: а) скаляр – величина, которая не меняется при переходе в другую систему отсчета, б) 4-вектор – четыре величины, которые при переходе в другую систему отсчета меняются согласно преобразований Лоренца. Релятивистская масса по определению (17) – это скаляр, но, с другой стороны, она никак не может быть скаляром в ковариантной 4-мерной форме записи законов физики, поскольку она разная в разных системах отсчета. Таким образом, величина $m_{рел}$ не является тензором в пространстве Минковского по отношению к преобразованиям Лоренца, поэтому с ее использованием не могут быть построены ковариантные уравнения.

Зависимость импульса от скорости можно представить двумя способами

$$1)\ \vec{p} = \frac{m}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \cdot \vec{\upsilon}, \qquad 2)\ \vec{p} = m \cdot \frac{\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}. \qquad (18)$$

Эта зависимость импульса давно подтверждена экспериментально, еще до создания ковариантной теории. Первый способ рассматривался как более предпочтительный, поскольку он сохраняет классическое соотношение для импульса ($p = m_{рел}\upsilon$), но при этом появляется понятие «релятивистская масса». Однако после создания ковариантной теории единственно правильным ***в рамках этой теории*** является второй способ трактовки выражения (18).

Следует, однако, отметить, что трактовка понятия «масса» до сих пор вызывает серьезные споры [7], особенно между теоретиками, которые опираются на ковариантную 4-мерную форму записи физических законов, и экспериментаторами, которые анализируют результаты исследования движения частиц в нелинейных ускорителях, и трактующие массу, как меру инертных и гравитационных свойств, а также – ее энергии.

Выразим скорость частицы через энергию (15):

$$\frac{\varepsilon}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \quad \to \quad \left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2 = 1 - \frac{\upsilon^2}{c^2} \quad \to \quad \upsilon = c\sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2}, \qquad (19)$$

откуда видно, что для больших значений энергии с увеличением энергии скорость изменяется незначительно. Таким образом, складывается впечатление, что при больших значениях скорости частица утяжеляется и ее все труднее и труднее разогнать. Еще Дж.Дж. Томсон задолго до введения понятия "релятивистская масса", изучая поведение электронов, показал, что большая скорость приводит к кажущемуся увеличению массы в классическом выражении для энергии $m\upsilon^2/2$.

А. Эйнштейн по поводу соотношения $\varepsilon = m_{рел}c^2$ говорил: "Масса и энергия, таким образом, сходны по существу – это только различные выражения одного и того же. Масса тела не постоянна; она меняется вместе с его энергией". Таким образом уже Эйнштейн отмечает, что масса тела (имеется в виду релятивистская) перестает быть одной из исходных первоначальных характеристик – она лишь дублирует понятие "энергия" и отличается от последней только на константу c^2. В связи с этим можно сказать, что масса m некоторого тела – это локализованная в этом теле энергия mc^2.

Отметим, что используя (15), легко можно получить выражение для импульса фотона с энергией $\varepsilon = p\nu$:

$$p = \frac{h\nu}{c}, \qquad (20)$$

которое невозможно получить без использования СТО.

Выводы. Изложенный в статье методический анализ применения принципа наименьшего действия убеждает студентов в том, что он является очень действенным инструментом анализа релятивистской механики, имеют большой потенциал в формировании научного стиля мышления и поэтому рассмотренная методика построения динамики СТО может быть рекомендована для использования преподавателями в лекционной практике.

Следует также отметить, что предложенная методика изложения динамики СТО охватывает все ключевые аспекты этого вопроса, не содержит избыточную информацию и математические сложности, потому достаточно легко воспринимается студентами.

Литература

1. Иродов И. Е. Основные законы механики: Учеб. пособие для физ. спец. вузов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1985. - 448 с., ил.
2. Мултановский В.В., Василевский А.С. Курс теоретической физики: Классическая электродинамика: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин.-тов.-М.: Просвещение, 1990.- 272 с.: ил.
3. Пеннер Д.И., Угаров В.А. Электродинамика и специальная тория относительности: Учеб. Пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1980.- 271 с., ил.
4. Шмутцер Э. Теория относительности. Современные представления. Путь к единству физики. Пер. с нем. А.С.Доброславского. М.: Мир, 1981. – 232 с.
5. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. Учеб. пособие для вузов. М.,”Высшая школа”, 1976.

6. Окунь Л.Б. "Понятие массы (Масса, энергия, относительность)" *УФН* 158 511–530 (1989).
7. http://corum.mephist.ru/threads/ О статье Окуня Л.Б. Понятие массы _ Форум НИЯУ МИФИ %D0%9E-%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B5-%D0%9E%D0%BA%D1%83%D0%BD%D1%8F-%D0%9B-%D0%91-%D0%9F%D0%BE%D0%BD%D1%8F%D1%82%D0%B8%D0%B5-%D0%BC%D0%B0%D1%81%D1%81%D1%8B.23102/